

7. FOLGE, 1961, BAND 7, THEFT 5-6
OF M. UNIVERSITY
MAY 10 1961
PHYSIK

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien,
M. Planck, E. Grüneisen, F. Möglich

Der ganzen Reihe 462. Band

Kuratorium:

W. GENTNER, W. GERLACH, F. HUND, B. KOCKEL,
W. MEISSNER, W. PAUL, R. W. POHL, R. ROMPE,
R. SEELIGER, W. WEIZEL

Herausgegeben von

H. KOPFERMANN
Heidelberg

G. RICHTER
Berlin



JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Redaktionsschluß am 16. März 1961

Inhalt

W. Klose, Berlin: Theorie der elektrischen Leitfähigkeit von Ge und Si. I. Die Elektron—Phonon-Matrixelemente. Mit 1 Abbildung	233
A. Kühnel und E. Schmutzer, Jena: Exakte Lösung der Feldgleichungen einer einfachen Variante der projektiven Relativitätstheorie für eine geladene Punktsingularität	243
E. Schmutzer, Jena: Untersuchung der stabilen Kreisbewegung einer strahlenden Ladung im Betatronfeld	251
T. Tietz, Łódź (Polen): Der Einfluß der Elektronenhülle des streuenden Atoms auf den Asymmetrieeffekt	258
T. Tietz, Łódź (Polen): Der Einfluß der Elektronenhülle auf die Bremsstrahlung in der Hartreeschen und Thomas-Fermischen Theorie des Atoms	263
G. Vogler, Jena: Berechnung und Messung des inneren Entmagnetisierungsfaktors. Mit 5 Abbildungen	268
D. Unangst, Jena: Über die magnetische Bezirksstruktur dünner Eisen-„Einkristall“-Schichten. Mit 30 Abbildungen	280
R. Wagner, Jena: Die Winkelabhängigkeit der magnetfeldinduzierten Anisotropie im Eisen—Nickel—Ferrit-Einkristall. Mit 8 Abbildungen	302
G. Heyl, Köln-Stammheim: Die Verwendbarkeit des Farbfilmes für quantitative mehrdimensionale Farbschlierenverfahren. Mit 11 Abbildungen	312
W. Brunner und H. Paul, Zeuthen bei Berlin: Zur Theorie der Kernspaltung. II. Die Deformation der Spaltungsfragmente. Mit 5 Abbildungen	326
W. Brunner und H. Paul, Zeuthen bei Berlin: Zur Theorie der Kernspaltung. III. Die Abhängigkeit der Kernkraftwechselwirkung und der kinetischen Energie von der Deformation. Mit 6 Abbildungen	333
D. von Ehrenstein, Heidelberg: Messung der Hyperfeinstrukturaufspaltung des $^{47}\text{F}_{9/2}$ -Grundzustandes im Co^{59} -I-Spektrum und Bestimmung des Quadrupolmomentes des Co^{59} -Kernes. Mit 3 Abbildungen	342

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Einsendung der Manuskripte erbeten an:

Prof. Dr. H. Kopfermann, Heidelberg, Albert-Ueberle-Straße 7,

Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die *Zeichnungen* sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den *Zitaten* wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Die Zeitschrift erscheint in Bänden mit 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden. Die Lieferung erfolgt durch den Sortimentsbuchhandel, in Ausnahmefällen unmittelbar vom Verlag. Der Bezugspreis beträgt je Band DM 34.— zuzüglich Postgebühren (U. S. \$ 8.57 einschließlich Porto).

Die Lieferung erfolgt bis zur Abbestellung, die nur für das Ende eines Bandes ausgesprochen werden kann.

ANNALEN DER PHYSIK

7. FOLGE * BAND 7, HEFT 5-6 * 1961

Theorie der elektrischen Leitfähigkeit von Ge und Si. I

Die Elektron-Phonon-Matrixelemente

Von Wolfgang Klose

Mit 1 Abbildung

Inhaltsübersicht

Die Elektron-Phonon-Matrixelemente werden mit dem Nordheim-Potential berechnet. In einer für tiefe Temperaturen gültigen Näherung findet man Elektronenstreuung an akustischen und optischen Phononen über Normalprozesse innerhalb eines Energietals (intravalley) und über Umklapp-Prozesse zwischen zwei Energietälern (intervalley). Es zeigt sich, daß bei Innertalstreuung die optischen Phononen in Si effektvoller sind als in Ge, während bei Zwischentalstreuung akustische und optische Phononen in Ge und Si gleichartige Matrixelemente liefern.

Einleitung

Durch die in den letzten Jahren angewachsene Kenntnis der Elektronenzustände in Halbleitern¹⁾ ist es möglich geworden, die Experimente detaillierter auszuwerten. Der Vergleich verschiedener Transportphänomene gestattet Rückschlüsse auf die Elektron-Phonon-Wechselwirkung im Kristall. Im sogenannten Ohmschen Bereich kann man für Ge und Si der Arbeit von Herring und Vogt²⁾ Einzelheiten über den Zusammenhang meßbarer Größen mit der Bandstruktur und den diversen Wechselwirkungsprozessen entnehmen. Im Fall der „heißen Elektronen“ machen sich die Symmetrien der Elektronenstruktur direkt bemerkbar³⁾.

Eine Theorie dieser Erscheinungen muß sich letztlich mit den verschiedenen Wechselwirkungen der Elektronen beschäftigen, in der üblichen Formulierung der Transporttheorie also die Matrixelemente des Wechselwirkungsoperators H mit Blochzuständen ausrechnen⁴⁾. Genauer:

$$(\psi(\mathbf{l}', \tau) \cdot \prod_{n'} \varphi(n') | H | \psi(\mathbf{l}, \tau) \cdot \prod_n \varphi(n)) \equiv \langle \mathbf{l}', \{n'\} | H | \mathbf{l}, \{n\} \rangle. \quad (1)$$

¹⁾ F. Herman, Rev. mod. Physics **30**, 102 (1958).

²⁾ G. Herring, E. Vogt, Physic. Rev. **101**, 944 (1956).

³⁾ E. G. S. Paige, Proc. phys. Soc. **74**, 174 (1960); S. H. Koenig, Proc. phys. Soc. **73**, 959 (1959); W. Sasaki, M. Shibuya, K. Mizuguchi, G. M. Hatoyama, J. Phys. Chem. Solids **8**, 250 (1959).

⁴⁾ F. J. Blatt, Solid State Physics, Vol. 4 (1957).

Dabei ist $\psi(\mathbf{r}, \tau)$ Blochfunktion und $\prod_n \varphi(n)$ der Zustand des Gitters, beschrieben als Produkt der Zustände der einzelnen Oszillatoren $n_{\mu p}(\mathbf{w})$. [Die Bezeichnung ist angepaßt der von Ehrenreich und Overhauser⁵⁾ benutzten: $p = 1, 2, 3$ zählt die drei Polarisationsrichtungen parallel und senkrecht zum Phononwellenvektor \mathbf{w} ab, $\mu = 1, 2$ unterscheidet akustische und optische Phononen.]

Die Matrixelemente (1) wurden von Ehrenreich und Overhauser⁵⁾ für p -Germanium ausgerechnet und von Harrison⁶⁾ für n -Ge, p -Ge, n -Si, p -Si angegeben. Ehrenreich und Overhauser lassen bei der Berechnung offen, ob sie H als Bloch- oder Nordheimpotential ansetzen, Harrison benutzt ein verallgemeinertes Blochpotential. Ähnlich dem Vorgehen von Ehrenreich und Overhauser sollen in der vorliegenden Arbeit für n -Ge und n -Si die Matrixelemente (1) ausgerechnet werden und für H das Nordheim-Potential Verwendung finden.

Die allgemeinen Matrixelemente

In das Nordheim-Potential

$$H = - \sum_{n,s} u \left(\begin{smallmatrix} n \\ s \end{smallmatrix} \right) \text{grad } v \left(\mathbf{r} - \mathbf{r} \left(\begin{smallmatrix} n \\ s \end{smallmatrix} \right) \right) \quad (2)$$

wird für die Verschiebung $u \left(\begin{smallmatrix} n \\ s \end{smallmatrix} \right)$ des Gitteratoms $\mathbf{r} \left(\begin{smallmatrix} n \\ s \end{smallmatrix} \right)$ der allgemein aus der dynamischen Gittertheorie⁷⁾ folgende Ausdruck eingesetzt:

$$u \left(\begin{smallmatrix} n \\ s \end{smallmatrix} \right) = \frac{1}{N^3} \sum_{\mu,p} \sum_{\mathbf{w}} \left\{ \hat{c}_{\mu p} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{w} \\ s \end{smallmatrix} \right) e^{i\Phi_{\mu s}} b_{\mu p}(\mathbf{w}) e^{i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{r} \left(\begin{smallmatrix} n \\ s \end{smallmatrix} \right))} + c.c. \right\} \quad (3)$$

(n numeriert die Elementarzellen, s die Atome der Basis innerhalb einer Elementarzelle. (Bei Ge und Si $s = 1, 2$.) Das Koordinatensystem ist so gelegt, daß $\mathbf{r} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = 0$. $b_{\mu p}(\mathbf{w})$ ist Vernichtungsoperator für ein Phonon (μ, P, \mathbf{w}). $\hat{c}_{\mu p} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{w} \\ s \end{smallmatrix} \right)$ ist der Polarisationsvektor, $\Phi_{\mu s}$ ein Phasenfaktor.)

Diese Schreibweise setzt eigentlich schon die Verwendung nur langer Gitterwellen voraus. Es soll daher die Theorie von vornherein auf nicht zu hohe Temperaturen beschränkt werden. Die Methode langer Wellen liefert dann (vgl. 7)^{5) 8)}:

$$\hat{c}_{\mu p} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{w} \\ s \end{smallmatrix} \right) = c_p - e^{-i\Phi_{\mu s}} \vec{\sigma}_p(\mathbf{w}) \cdot \delta_{s2} e^{2\pi i \delta_{\mu 2}} \quad (4)$$

$$\Phi_{s\mu} = \pi \delta_{\mu 2} \delta_{s2} \quad \delta: \text{Kroneckersymbol}$$

$$\vec{\sigma}_p(\mathbf{w}) = \frac{\alpha_0 \beta}{2 \alpha} \begin{pmatrix} 0 & w_z & w_y \\ w_z & 0 & w_x \\ w_y & w_x & 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_p$$

$\sqrt{2} \mathbf{e}_p =$ Einheitsvektoren $\parallel \mathbf{w}$ und $\perp \mathbf{w}$.

α und β sind elastische Konstanten, $2 \alpha_0$ die Gitterkonstante.

⁵⁾ H. Ehrenreich, A. W. Overhauser, Physic. Rev. **104**, 331 (1956).

⁶⁾ W. A. Harrison, Physic. Rev. **104**, 1281 (1956).

⁷⁾ M. Born, K. Huang, The Dynamical Theory of Lattices, Oxford 1954, § 26, 27.

⁸⁾ H. M. J. Smith, Trans. Roy. Soc. (London) A **241**, 105 (1948).

Der Vektor $\vec{o}_p(\mathbf{w})$ beschreibt die bei $\mathbf{w} \neq 0$ (wegen der Existenz einer Basis im Gitter) auftretende Vermischung akustischer und optischer Schwingungen.

Für das Atompotential $v\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}\left(\begin{smallmatrix} n \\ s \end{smallmatrix}\right)\right)$ wird für die weiteren Betrachtungen gleich festgesetzt, daß es nur innerhalb der zum Atom bei $\mathbf{r}\left(\begin{smallmatrix} n \\ s \end{smallmatrix}\right)$ gehörigen „atomaren Wigner-Seitz-Zelle“ (AWSZ) von Null verschieden ist. Diese AWSZ wird durch eine Kugel approximiert, deren Radius gleich der halben Basislänge ist.

Die Blochfaktoren $\chi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = N^{3/2} \psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ werden an einer Bandkante \mathbf{k}_σ entwickelt. Wir erhalten mit $\mathbf{k} = \mathbf{k}_\sigma + \vec{\kappa}$:

$$\chi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \chi_\sigma(\mathbf{r}) - i \vec{\kappa} \sum_j \chi_\sigma^j (E_\sigma - E_\sigma^j)^{-1} \int \chi_\sigma^{j*} \text{grad} \chi_\sigma^{(r)} d^3 r. \quad (5)$$

Der Index j numeriert die zum gleichen \mathbf{k} gehörigen Energiewerte der Schrödinger-Gleichung, χ^j sind die zugehörigen Blochfaktoren; die Bezeichnung ist so gewählt, daß der zur Bandkante gehörige Energiewert keinen Index j hat. Da die Bandkanten des Leitungsbandes in Ge und Si nicht entartet sind, kann man die einfache Störungsrechnung verwenden.

Der Störoperator H wird nun noch entwickelt:

$$H = - \sum_{\mu, p} \sum_{\mathbf{w}} H_{\mu p}(\mathbf{w}) \quad (2a)$$

und dann (2a) und (3) in (1) eingesetzt. Da nach (3) nur Einphononenprozesse möglich sind, werden gleich nur die Matrixelemente angeschrieben, für die es etwas von Null Verschiedenes gibt. Das sind solche, bei denen Anfangs- und Endzustand des Gitters um ein Phonon differieren. Indem man für $\{n\}$ einfach $n_{\mu p}(\mathbf{w})$, oder noch kürzer einfach n schreibt, bleibt:

$$\langle \mathbf{k}_\sigma + \vec{\kappa}', \{n'\} | H | \mathbf{k}_\sigma + \vec{\kappa}, \{n\} \rangle = - \langle \mathbf{k}_\sigma + \vec{\kappa}', n \pm 1 | H_{\mu p}(\mathbf{w}) | \mathbf{k}_\sigma + \vec{\kappa}, n \rangle$$

$$= \left(\frac{\hbar \bar{n}}{N^3 M \omega_{\mu p}(\mathbf{w})} \right)^{1/2} \sum_{\mathbf{R}} \delta_{\mathbf{R} \pm \mathbf{w}, \mathbf{k}_\sigma - \mathbf{k}_\sigma + \vec{\kappa} - \vec{\kappa}'} \cdot \sum_s \hat{e}_{\mu p}^{(*)} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{w} \\ s \end{smallmatrix} \right) e^{\mp i \Phi_{\mu s}} e^{\mp i(\mathbf{w}, \mathbf{r}\left(\begin{smallmatrix} n \\ s \end{smallmatrix}\right))}.$$

$$\cdot \int_{(0)} \chi^*(\mathbf{k}_\sigma + \vec{\kappa}', \mathbf{r}) \text{grad} v\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ s \end{smallmatrix}\right)\right) \cdot e^{i(\mathbf{R} \pm \mathbf{w}) \cdot \mathbf{r}} \chi(\mathbf{k}_\sigma + \vec{\kappa}, \mathbf{r}) d^3 r \quad (6)$$

$$\text{def} \left(\frac{\hbar \bar{n}}{N^3 M \omega_{\mu p}(\mathbf{w})} \right)^{1/2} \sum_{\mathbf{R}} \delta_{\mathbf{R} \pm \mathbf{w}, \mathbf{k}_\sigma - \mathbf{k}_\sigma + \vec{\kappa} - \vec{\kappa}'} \cdot M_\mu$$

M = Masse der Elementarzelle.

$$\text{Es bedeuten } \bar{n} = \begin{cases} n_{\mu p}(\mathbf{w}) + 1 & \text{bei Emission} \\ n_{\mu p}(\mathbf{w}) & \text{bei Absorption} \end{cases}$$

und $e^{(*)}$ conj. komplex nur bei Emission.

(Die Summe über \mathbf{R} ist dabei so zu verstehen, daß nur ein bestimmtes \mathbf{R} , also 1 Summand für einen vorgelegten Prozeß in Betracht zu ziehen ist.) Die Integration erstreckt sich jetzt nur noch über die Nullte Elementarzelle.

Spezialisierung auf tiefe Temperaturen

Wir setzen nun in (6) die Relationen (4) und (5) ein. Dabei nehmen wir neben partiellen Integrationen folgende Vernachlässigungen und Vereinfachungen vor:

- a) es wird entwickelt $e^{\pm i(w, \tau)} = 1 \pm i(w, \tau)$ bei $\mathfrak{K} = 0$.
- b) wenn $\mathfrak{K} \neq 0$ wird in allen Exponenten $w = 0$ gesetzt.
- c) Integrale, die den Faktor $(\tau - \tau_s^{(0)}) \cdot v(\tau - \tau_s^{(0)})$ enthalten, werden weggelassen.
- d) alle Terme mit $w^2, \vec{\kappa}^2, (w, \vec{\kappa})$ werden weggelassen.
- e) wegen der über $v(\tau - \tau_s^{(0)})$ gemachten Voraussetzung erstrecken sich die Integrale nicht über die ganze Nullte Elementarzelle, sondern nur über die zu s gehörige AWSZ, angedeutet durch die Grenzen $(0, s)$. Formal darf man im Integranden statt $v(\tau - \tau_s^{(0)})$ immer das ganze Gitterpotential $V(\tau)$ einsetzen (die hinzuaddierten Terme sind ohnehin nach Voraussetzung gleich Null).
- f) zur Abkürzung wird verwendet:

$$\begin{aligned}\vec{T}^j_{(s)} &= (E_s - E_s^j)^{-1} \int_{(0)} \chi_s^j \star \text{grad } \chi_s d^3 \tau \\ \vec{Z}_{10}(\varrho \sigma) &= - \int_{(0,2)} d^3 \tau \chi_c^* \chi_v \text{grad } V(\tau)\end{aligned}\quad (7)$$

$$\vec{Z}_{11}(\varrho \sigma) = - e^{-i(\mathfrak{K} \tau_s^{(0)})} \int_{(0,2)} d^3 \tau \chi_c^* \chi_s e^{i \mathfrak{K} \tau} \text{grad } V(\tau).$$

Für die zwei Fälle $\mathfrak{K} \neq 0$ und $\mathfrak{K} = 0$ ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}M_\mu(\mathfrak{K} \neq 0) &= - \sum_s e^{\mp i \Phi_{\mu s}} \int_{(0,s)} d^3 \tau V(\tau) e^{i \mathfrak{K} \tau} [e_p \cdot \text{grad} (\chi_c^* \chi_s) + i (e_p \cdot \mathfrak{K}) \chi_c^* \chi_s] \\ &+ \sum_j (\vec{\kappa} \cdot \vec{T}^j_{(s)}) \cdot \sum_s e^{\mp i \Phi_{\mu s}} \int_{(0,s)} d^3 \tau V(\tau) e^{i \mathfrak{K} \tau} [i e_p \cdot \text{grad} (\chi_c^* \chi_s) - (e_p \cdot \mathfrak{K}) \chi_c^* \chi_s] \\ &- \sum (\vec{\kappa}' \cdot \vec{T}^j_{(s)}) \cdot \sum_s e^{\mp i \Phi_{\mu s}} \int_{(0,s)} d^3 \tau V(\tau) e^{i \mathfrak{K} \tau} [i e_p \cdot \text{grad} (\chi_c^* \chi_s) - (e_p \cdot \mathfrak{K}) \chi_c^* \chi_s] \\ &\mp i e^{\mp i(\mathfrak{K} \tau_s^{(0)})} \vec{Z}_{11}(\varrho \sigma) \cdot \vec{o}_p(w) e^{i \pi \delta_{\mu 2}}\end{aligned}\quad (8a)$$

$$\begin{aligned}M_\mu(\mathfrak{K} = 0) &= - \sum_s e^{\mp i \Phi_{\mu s}} \int_{(0,s)} d^3 \tau V(\tau) e_p \cdot \text{grad} (\chi_c^* \chi_s) \\ &+ i \sum_j \left\{ (\vec{\kappa} \cdot \vec{T}^j_{(s)}) \sum_s e^{\mp i \Phi_{\mu s}} \int_{(0,s)} d^3 \tau V(\tau) e_p \cdot \text{grad} (\chi_c^* \chi_s^j) \right. \\ &- (\vec{\kappa}' \cdot \vec{T}^j_{(s)}) \sum_s e^{\mp i \Phi_{\mu s}} \int_{(0,s)} d^3 \tau V(\tau) e_p \cdot \text{grad} (\chi_c^* \chi_s) \\ &\pm i (e_p \cdot w) \sum_s e^{\mp i \Phi_{\mu s}} \int_{(0,s)} d^3 \tau V(\tau) \chi_c^* \chi_s \\ &\left. \mp i \vec{o}_p(w) \cdot \vec{Z}_{10}(\varrho \sigma) \cdot e^{i \pi \delta_{\mu 2}} \right\}\end{aligned}\quad (8b)$$

Die Ausdrücke (8) können noch erheblich vereinfacht werden, indem man die Integrale über die 2 AWSZn zueinander in Beziehung setzt. Bekanntlich

ist der Mittelpunkt der Basis Spiegelpunkt des Diamantgitters. Man kann so die Integrale ineinander umrechnen. Es ist z. B.

$$\begin{aligned} & \int_{(0,2)} d^3 r_2 V(r_2) e^{i \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_2} \text{grad} (\chi_e^* \chi_\sigma^j) \\ &= \int_{(0,2)} d^3 r'' V \left[\frac{1}{2} \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbf{r}'' \right] e^{i \mathbf{R} \cdot \left[\frac{1}{2} \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbf{r}'' \right]} \cdot \text{grad}'' \left[\chi_e^* \left(\frac{1}{2} \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbf{r}'' \right) \chi_\sigma^j \left(\frac{1}{2} \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbf{r}'' \right) \right] \\ &= - \int_{(0,1)} d^3 r' V \left[\frac{1}{2} \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \mathbf{r}' \right] e^{i \mathbf{R} \cdot \left[\frac{1}{2} \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \mathbf{r}' \right]} \cdot \text{grad}' \left[\chi_e^* \left(\frac{1}{2} \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \mathbf{r}' \right) \chi_\sigma^j \left(\frac{1}{2} \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \mathbf{r}' \right) \right]. \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie des Gitters ist nun $V \left[\frac{1}{2} \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \mathbf{r}' \right] = V \left[\frac{1}{2} \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbf{r}' \right]$ und nach⁶⁾ Appendix ist:

$$\chi_\sigma^j \left(\frac{1}{2} \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \mathbf{r}' \right) = \chi_\sigma^{j*} \left(\frac{1}{2} \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbf{r}' \right).$$

Also wird obiger Ausdruck:

$$\begin{aligned} & - \int_{(0,1)} d^3 r' V \left[\frac{1}{2} \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbf{r}' \right] e^{i \mathbf{R} \cdot \left[\frac{1}{2} \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \mathbf{r}' \right]} \cdot \text{grad}' \left[\chi_e \left(\frac{1}{2} \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbf{r}' \right) \chi_\sigma^{j*} \left(\frac{1}{2} \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbf{r}' \right) \right] \\ &= - e^{i \mathbf{R} \cdot \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \int_{(0,1)} d^3 r_1 V(r_1) e^{-i \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_1} \text{grad} (\chi_e \chi_\sigma^{j*}). \end{aligned}$$

Damit kann man alle Integrale auf die 1. AWSZ umschreiben. Mit den weiteren Abkürzungen:

$$\vec{T}_{1,2}^j(\varrho \sigma) = \int_{(0,1)} d^3 r V(r) \text{grad} (\chi_e^* \chi_\sigma^j \mp \chi_e \chi_\sigma^{j*})$$

$$\vec{T}_{3,4}^j(\varrho \sigma) = \int_{(0,1)} d^3 r V(r) [e^{i \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}} \text{grad} (\chi_e^* \chi_\sigma^j) \mp e^{i \mathbf{R} \cdot \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \text{grad} (\chi_e \chi_\sigma^{j*})]$$

$$\vec{T}_{3,4}^j(\sigma \varrho) = \int_{(0,1)} d^3 r V(r) [e^{i \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}} \text{grad} (\chi_e^{j*} \chi_\sigma) \mp e^{i \mathbf{R} \cdot \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \text{grad} (\chi_\sigma^j \chi_e^*)]$$

$$T_{5,6}(\varrho \sigma) = \int_{(0,1)} d^3 r V(r) [e^{i \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}} \chi_e^* \chi_\sigma^j \mp e^{i \mathbf{R} \cdot \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \chi_e \chi_\sigma^{j*}]$$

$$T_{5,6}(\sigma \varrho) = \int_{(0,1)} d^3 r V(r) [e^{i \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}} \chi_e^{j*} \chi_\sigma \mp e^{i \mathbf{R} \cdot \mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \chi_e^j \chi_\sigma^*] \quad (9)$$

$$Z_{1,2}(\varrho \sigma) = \int_{(0,1)} d^3 r V(r) (\chi_e^* \chi_\sigma \mp \chi_e \chi_\sigma^*)$$

$$\vec{Z}_{3,4}(\varrho \sigma) = \int_{(0,1)} d^3 r V(r) \text{grad} (\chi_e^* \chi_\sigma \mp \chi_e \chi_\sigma^*)$$

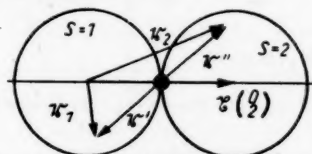


Abb. 1. Die die AWSZn ersetzenden Kugeln in einer Elementarzelle des Gitters

$$\vec{Z}_{5,6}(\varrho\sigma) = \int_{(0,1)} d^3\tau V(\tau) [e^{i\mathfrak{R}\tau} \text{grad}(\chi_e^* \chi_\sigma) \mp e^{i\mathfrak{R}\tau} \binom{0}{2} - i\mathfrak{R}\tau \text{grad}(\chi_e \chi_\sigma^*)]$$

$$Z_{7,8}(\varrho\sigma) = \int_{(0,1)} d^3\tau V(\tau) [e^{i\mathfrak{R}\tau} \chi_e^* \chi_\sigma \mp e^{i\mathfrak{R}\tau} \binom{0}{2} - i\mathfrak{R}\tau \chi_e \chi_\sigma^*]$$

$$e_p \cdot \vec{Z}_{3,4,5,6} \equiv Z_{3,4,5,6}; \quad e_p \cdot \vec{T}_{1,2,3,4}^j \equiv T_{1,2,3,4}$$

ist dann bei gleichzeitiger Ausführung der s -Summation, also Trennung optischer und akustischer Phononen:

$$M_1(\mathfrak{R} \neq 0) \quad (10)$$

$$= -Z_5(\varrho\sigma) - i(e_p \cdot \mathfrak{R}) Z_8(\varrho\sigma) + \sum_j (\vec{\kappa} \cdot \vec{T}^j(\sigma)) [i T_3^j(\varrho\sigma) - (e_p \cdot \mathfrak{R}) T_6^j(\varrho\sigma)] \\ + \sum_j (\vec{k}' \cdot \vec{T}^j(\varrho)) [i T_3^j(\sigma\varrho) - (e_p \cdot \mathfrak{R}) T_6^j(\sigma\varrho)] \mp i e^{i\left(\mathfrak{R}\tau \binom{0}{2}\right)} \vec{Z}_{11}(\varrho\sigma) \cdot \vec{o}_p(w)$$

$$M_2(\mathfrak{R} \neq 0)$$

$$= -Z_6(\varrho\sigma) - i(e_p \cdot \mathfrak{R}) Z_7(\varrho\sigma) + \sum_j (\vec{\kappa} \cdot \vec{T}^j(\varrho)) [i \vec{T}_4^j(\varrho\sigma) - (e_p \cdot \mathfrak{R}) T_5^j(\varrho\sigma)] \\ + \sum_j (\vec{\kappa}' \cdot \vec{T}^j(\varrho)) [i T_4^j(\sigma\varrho) - (e_p \cdot \mathfrak{R}) T_5^j(\sigma\varrho)] \pm i e^{i\left(\mathfrak{R}\tau \binom{0}{2}\right)} \cdot \vec{Z}_{11}(\varrho\sigma) \cdot \vec{o}_p(w)$$

$$M_1(\mathfrak{R} = 0) = i \sum_j \{ (\vec{\kappa} \cdot \vec{T}^j(\sigma)) \cdot T_1^j(\varrho\sigma) - (\vec{k}' \cdot \vec{T}^j(\varrho)) T_1^j(\sigma\varrho) \}$$

$$\mp i(e_p \cdot w) Z_2(\varrho\sigma) \mp i \vec{o}_p(w) \vec{Z}_{10}(\varrho\sigma) - Z_3(\varrho\sigma) \quad (11)$$

$$M_2(\mathfrak{R} = 0) = -Z_4(\varrho\sigma) + i \sum_j \{ (\vec{\kappa} \cdot \vec{T}^j(\sigma)) T_2^j(\varrho\sigma) + (\vec{k}' \cdot \vec{T}^j(\sigma)) T_2^j(\sigma\varrho) \}$$

$$\mp i(e_p \cdot w) Z_1(\varrho\sigma) \pm i \vec{o}_p(w) \cdot \vec{Z}_{10}(\varrho\sigma).$$

Explizite Anwendung auf Ge und Si

Die in (10) und (11) angegebenen Matricelemente werden nun für Ge und Si spezialisiert. Dazu ist es nötig, die spezielle Bandstruktur dieser Halbleiter in Rechnung zu stellen. Die Leitungsbandkanten liegen im Ge auf der Oberfläche der Brillouinzone in [1,1,1]-Richtung in den Punkten L , im Si in [1,0,0]-Richtung im Inneren der Brillouinzone in Punkt Δ . Alle in den Integralen vorkommenden Funktionen haben bestimmte Symmetrieeigenschaften, es kann ein Integral somit aus Symmetriegründen verschwinden. Das ist d. u. n. d. der Fall, wenn das Produkt der irreduziblen Darstellungen, zu denen die einzelnen Faktoren im Integral gehören, in der Ausreduktion nicht die Einsdarstellung enthält.

Als Symmetriegruppe kommen für die Blochfaktoren χ_e die zu k_e gehörigen Punktgruppen in Frage, die anderen Funktionen im Integranden sind danach ebenfalls zu klassifizieren. Stehen im Integranden zwei Blochfaktoren zu verschiedenen k_e , k_σ , dann kommt als Symmetriegruppe der Durchschnitt der beiden Punktgruppen zu k_e und k_σ in Frage.

Es treten folgende Punktgruppen in Erscheinung (Klassifizierung nach Koster⁹):

	Ge	Si
$ k_\varrho = k_\sigma $ irred. Darstellungen	D_{3d} $L_1, L_2, L_3, L'_1, L'_2, L'_3$	C_{4v} $A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3$
$ k_\varrho \neq k_\sigma $ irred. Darstellungen	C_{2h} l_1, l_2, l'_1, l'_2	C_{1h} δ_1, δ_2

Verstehen wir unter \parallel und \perp die Komponenten eines Vektors parallel oder senkrecht zu k_ϱ ($|k_\varrho| = |k_\sigma|$) oder der von (k_ϱ, k_σ) bestimmten Fläche, ist für die Zugehörigkeit zu Darstellungen:

	$V(\tau)$	χ_ϱ	grad \parallel	grad \perp
Ge	D_{3d}	L_1	L'_2	L'_3
	C_{2h}	l_1	l'_2	l'_1
Si	C_{4v}	A_1	A_1	A_3
	C_{1h}	δ_1	δ_1	δ_2

[Zu $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ sind keine detaillierten Angaben gemacht, es tritt eine größere Anzahl von irreduziblen Darstellungen auf, so daß in den betreffenden Integralen sicher die 1-Darstellung vorkommt.]

Anwendung dieser Symmetrien auf die Integrale zeigt nun, daß

$$\vec{Z}_4(\varrho\varrho) = 2 \int d^3\tau V(\tau) \text{grad} |\chi_\varrho|^2$$

bei Ge immer gleich Null ist, während bei Si $\vec{Z}_4(\varrho\varrho)$ von Null verschieden ist. Die optischen Phononen tragen also zu Stößen an einer Bandkante in 0. Näherung nur im Si etwas bei. (Harrison⁶) hat in seinen Integranden noch eine vom Blochpotential herrührende Funktion mit definierter Symmetrie, die gerade bei Ge die optischen Phononen in 0. Ordnung beitragen läßt, im Si dagegen nicht.)

Weiter finden wir, daß im Ge $\vec{Z}_{3,4}(\varrho\sigma) = 0$ sind, im Si dagegen nicht, während $\vec{Z}_{5,6}, Z_{7,8}$ in Ge und Si ungleich Null sind.

Wenn wir unsere Näherung so vervollständigen, daß wir in einem Matrixelement immer nur den ersten nichtverschwindenden Term mitnehmen, dann können wir dort, wo Terme 0. Näherung nicht verschwinden, die komplizierten Terme 1. Näherung einfach wegstreichen. Im Sinn unserer Tieftemperaturnäherung werden wir die Terme

$$M_\mu(\mathfrak{K} = 0, \varrho \neq \sigma)$$

nicht weiter betrachten da wegen der großen Differenzen von k_ϱ und k_σ der Impulssatz mit sehr kleinen $\vec{\kappa}, \vec{\kappa}', \nu$ nicht zu erfüllen ist¹⁰).

⁹) G. F. Koster, Solid State Physics, Vol. 5 (1957).

¹⁰) In diesen Termen unterscheiden sich Ge und Si am meisten. Man erkennt aus (11) sofort, daß in Si akustische und optische Phononen in 0. Näherung zu den Matrixelementen beitragen, während in Ge akustische und optische Phononen keine Terme 0. Ordnung aufweisen, die Theorie dafür also viel komplizierter wird.

Wir beschränken uns also auf Normal-Innertalstreuung und Umklapp-Zwischentalstreuung im Ge und Si.

Die endgültigen Matricelemente

Zur Vereinfachung der Schreibung führen wir noch die Tensoren:

$$\mathfrak{T}_\lambda(\varrho) = \sum_j T_j^\lambda(\varrho) x T_\lambda^j(\varrho\varrho), \quad \lambda = 1, 2 \quad (12)$$

ein. Man erkennt, daß aus Symmetriegründen $\mathfrak{T}_\lambda(\varrho)$ die Form hat:

$$\mathfrak{T}_\lambda(\varrho) = \begin{pmatrix} \mathfrak{T}_\lambda^{\parallel}(\varrho) & 0 \\ 0 & \mathfrak{T}_\lambda^{\perp}(\varrho) \end{pmatrix}$$

wo $\mathfrak{T}_\lambda^{\parallel}$ ein zweidimensionaler Tensor ist.

Wir wählen die Koordinaten so, daß $\mathfrak{T}_\lambda(\varrho)$ diagonal ist, und definieren:

$$C(\varrho) = \mathfrak{T}_1(\varrho) - \mathfrak{Z}_2(\varrho\varrho) \cdot 1. \quad (13)$$

Wegen der Gleichwertigkeit der \perp -Komponenten ist: $C_2(\varrho) = C_3(\varrho)$. Ferner ist mit:

$$\vec{o}_p(w) = |w| \cdot \frac{a_0 \beta}{2a} \cdot \vec{\Omega}_p,$$

$$\vec{Z}_4(\varrho\varrho) = D(\varrho) \cdot k_e / |k_e| \quad (\text{als einzig nichtverschwindende Komponente})$$

$$\vec{Z}_{10}(\varrho\varrho) = -\frac{1}{2} \vec{Z}_j(\varrho\varrho) \quad (14)$$

$$\bar{D}(\varrho) = -\frac{a_0 \beta}{2\sqrt{2}a} D(\varrho)$$

endgültig für das Matricelement M_μ :

Innertalstreuung, $\mathfrak{K} = 0$:

$$\begin{aligned} M_{\text{akust.}} &= \pm i \left\{ w \begin{pmatrix} C_1(\varrho) & 0 & 0 \\ 0 & C_2(\varrho) & 0 \\ 0 & 0 & C_2(\varrho) \end{pmatrix} e_p + |w| \bar{D}(\varrho) \left(\vec{\Omega}_p \cdot \frac{k_e}{|k_e|} \right) \right\} \\ M_{\text{opt.}}^{\text{Si}} &= -D(\varrho) \cdot (e_p \cdot k_e) / |k_e| \\ M_{\text{opt.}}^{\text{Ge}} &= i(\bar{\kappa} + \bar{\kappa}') \begin{pmatrix} \mathfrak{T}_\lambda^{\parallel}(\varrho) & 0 \\ 0 & \mathfrak{T}_\lambda^{\perp}(\varrho) \end{pmatrix} \mp i|w| \bar{D}(\varrho) \left(\vec{\Omega}_p \cdot \frac{k_e}{|k_e|} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Zwischentalstreuung, $\mathfrak{K} \neq 0$:

$$\begin{aligned} M_{\text{akust.}} &= -(\vec{Z}_5(\varrho\sigma) - \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{Z}_8(\varrho\sigma)) e_p \\ M_{\text{opt.}} &= -(\vec{Z}_6(\varrho\sigma) - \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{Z}_7(\varrho\sigma)) e_p. \end{aligned} \quad (16)$$

Die noch übrigbleibenden Integrale müßten für Ge und Si nun ausgerechnet werden. Wir verwenden sie weiterhin als nicht verschwindende konstante Parameter. Ihre Anzahl ist leicht angebbar:

Si: Innertalstreuung: $C_1(\varrho)$, $C_2(\varrho)$, $D(\varrho)$

Zwischentalstreuung: $\int d^3\tau V(\tau) e^{i\mathfrak{K}\tau} \text{grad}(\chi_e^* \chi_\sigma)$; $\int d^3\tau V(\tau) e^{i\mathfrak{K}\tau} \chi_e^* \chi_\sigma$
als Bestandteile von $\vec{Z}_{5,6}$ und $Z_{7,8}$;

Ge: Innertalstreuung: $C_1(\varrho), C_2(\varrho), D(\varrho), \mathfrak{I}_\lambda^{\parallel}(\varrho), \mathfrak{I}_\lambda^{\perp}(\varrho)$.

Zwischentalstreuung: wie bei Si.

Die Theorie enthält damit bei Si fünf Parameter und bei Ge sieben.

Diskussion

Die in (11) für $\varrho = \sigma$ angegebenen Matrixelemente können mit denen aus⁵⁾ und⁶⁾ verglichen werden. Die bei Ehrenreich und Overhauser auftretenden Entartungsindizes können bei dem Vergleich außer acht gelassen werden. Man erkennt, daß die Gl. (3.22) und (3.27) in⁵⁾ bis auf partielle Integrationen, die Taylorentwicklung der Blochfaktoren und Transformation auf die 1. AWSZ mit unseren Größen übereinstimmen.

Wir beachten, daß in (3.4) in⁵⁾ ein Bloch- und Nordheim-Potential umfassender Wechselwirkungsansatz gemacht ist:

$$H = - \sum_{n,s} u \left[\xi \binom{n}{s} + \eta \cdot (\tau - \xi \binom{n}{s}) \right] \text{grad } v \left(\tau - \xi \binom{n}{s} \right)^{11).} \quad (17)$$

Betrachtet man in der Entwicklung von u nach Normalkoordinaten nur den Term zu $w = 0$, ist:

$$u \left[\xi \binom{n}{s} + \eta (\tau - \xi \binom{n}{s}) \right] \sim \dot{e}_{\mu p} \binom{0}{s} e^{i\Phi_{\mu s}} = e_p e^{i\Phi_{\mu s}}$$

also:

$$H \sim \sum_{n,s} e^{i\Phi_{\mu s}} e_p \cdot \text{grad } v \left(\tau - \xi \binom{n}{s} \right) \quad (18)$$

Es fällt also der Unterschied zwischen den zwei Potentialen heraus, während er bei Termen $w \neq 0$ erhalten bleibt. Da für das optische Matrixelement ein Term 0. Ordnung auftritt (und nur das ist in⁵⁾ angegeben), stellt man dafür keinen Unterschied bezüglich der Potentiale fest.

Hiernach können wir also unsere Ergebnisse (15), (16) für die Elektronen in Ge und Si, soweit sie die Terme 0. Ordnung betreffen, auch für das Blochpotential als gültig ansehen.

Vergleicht man aber unsere Gl. (15) mit denen in⁶⁾, so stößt man auf erhebliche Unterschiede¹²⁾.

In⁶⁾ (Tab. 3) wird angegeben, daß für Ge das optische Matrixelement 0. Ordnung, in Si von 1. Ordnung ist. Das liegt daran, daß in den zu (11) äquivalenten Integralen (18) und (19) in⁶⁾ noch gittersymmetrische Funktionen $R(\tau)$ auftreten, die von einer Verallgemeinerung des Blochpotentials herrühren. Diese Funktionen $R(\tau)$ kann man mit der strengen Gittertheorie nicht ausrechnen, Harrison gibt auch keine explizit an.

Wie steht dieses Ergebnis nun in Einklang mit der in (18) behaupteten Äquivalenz der Terme 0. Ordnung? Das von uns in (2) bzw. (17) als Nordheim- bzw. Bloch-Potential bezeichnete Wechselwirkungspotential stimmt nicht mit dem von Harrison benutzten Blochpotential überein. Der Term bei $w = 0$ sieht in⁶⁾ so aus:

$$H \sim e_p \cdot R(\tau) \cdot \sum_{n,s} \text{grad } v \left(\tau - \xi \binom{n}{s} \right).$$

¹¹⁾ $\eta = 0$ bedeutet Nordheim-Potential. Man hat realiter wohl $0 < \eta < 1$ anzunehmen!

¹²⁾ Man kann hier die Endergebnisse direkt vergleichen, weil Harrison explizit die Matrixelemente für Elektronen in Ge und Si angibt.

Ein Ausdruck, den man nicht aus (18) herleiten kann. Dieser Ausdruck kann aus (17) entstehen, wenn man $\eta = 1$ setzt, $u(\tau)$ vor die Summe zieht und außerdem noch ad hoc Annahmen über die Schwingungsphasen macht (was sich in $R(\tau)$ verkörpert). Für akustische Phononen kann dabei keine wesentliche Veränderung auftreten, bei den im Gitter mit Basis aber möglichen optischen Schwingungen braucht das Verfahren nicht eindeutig zu sein.

Die hier aufgezeigten Unterschiede, die sich bei den verschiedenen Potentialen ergeben, geben über diese Veränderung Aufschluß.

Wir bemerken ferner, daß es bisher nicht nötig war, spezielle Annahmen über die elastischen Konstanten und Energietäler zu machen, wie es bei Betrachtung der Löcher nötig ist⁵⁾. Bei der Formulierung einer Transporttheorie wird es aber nötig sein, vereinfachende Annahmen einzuführen.

Diese Überlegungen, sowie eine Abschätzung der relativen Häufigkeiten der einzelnen Prozesse sind einer weiteren Arbeit vorbehalten.

Berlin, Physikalisch-Technisches Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 31. März 1960.

Exakte Lösung der Feldgleichungen einer einfachen Variante der projektiven Relativitätstheorie für eine geladene Punktsingularität

Von A. Kühnel und E. Schmutzer

Inhaltsübersicht

Es wird eine exakte Lösung der Feldgleichungen einer einfachen Variante der verallgemeinerten projektiven Relativitätstheorie für eine geladene Punktmasse angegeben. Man kann diese Lösung ansehen als die Verallgemeinerung der Lösung von Heckmann, Jordan und Fricke¹⁾ für eine neutrale Punktsingularität, wenn auch der mathematischen Theorie eine abweichende physikalische Interpretation zugrunde liegt. Die Lösung wird bezüglich des Kurvenverlaufs der Felder sowie bezüglich der drei relativistischen Effekte diskutiert. Die zum Ausdruck kommende nichtlineare Elektrodynamik weist gewisse interessante Parallelen zur nichtlinearen Elektrodynamik von Bagge auf.

§ 1. Einleitung

In früheren Arbeiten²⁾ wurde eine einfache Variante der verallgemeinerten projektiven Relativitätstheorie untersucht, die insbesondere auch eine Reihe nichtlinearer elektrodynamischer Aspekte enthält. Obwohl aus vorwiegend kosmologischen Gründen viele Autoren wesentlich kompliziertere Feldgleichungen wählen³⁾, erscheint uns aber gerade die von uns betrachtete einfache Variante aus Gründen ihrer Einfachheit besonders untersuchenswert, da wir den kosmologischen Aspekten nicht diese gewichtige Rolle zuschreiben möchten. In 5-dimensionaler Form ist die vorgeschlagene Feldgleichung die einfache Verallgemeinerung der Einstein-Gleichung:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (1)$$

In 4-dimensionaler Form kann man das System der Feldgleichungen schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{J}{J_0} \left(R_{mn}^4 - \frac{R}{2} g_{mn} \right) \\ = \kappa \left[\left\{ H_m^i F_{in} + \frac{g_{mn}}{4} H_{ij} F^{ij} \right\} + \left\{ -\frac{1}{\kappa J_0} (J_{,m;n} - g_{mn} J_{,i}^i) \right\} + \theta_{mn} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

¹⁾ O. Heckmann, P. Jordan u. W. Fricke, *Astrophys. Z.* **28**, 113 (1951).

²⁾ E. Schmutzer, *Z. Physik* **154**, 312 (1959); *Wiss. Z. Univ. Jena, Math.-nat. Reihe* **8**, 15 (1959); *Z. Naturf.* **14a**, 485, 489 (1959).

³⁾ P. Jordan, *Z. Physik* **157**, 112 (1959); K. Just, *Z. Physik* **144**, 411 (1956).

$$F^{mj}_{;j} = \frac{j^m}{c}, \quad H_{[rs,m]} = 0, \quad F_{rs} = \frac{J^2}{2\kappa J_0} H_{rs}. \quad (3)$$

$$J_{;i}^i = \frac{\kappa J_0}{2} H_{ij} F^{ij} + \kappa K J - \frac{\kappa}{3} T J. \quad (4)$$

(bezüglich der physikalischen Interpretation vgl. oben zitierte Arbeiten).

§ 2. Feld einer geladenen Punktsingularität

Das Feld des untersuchten geladenen Massenpunktes wird statisch und kugelsymmetrisch vorausgesetzt. Die Kugelsymmetrie des Problems legt es nahe, für die räumliche Metrik Polarkoordinaten zu verwenden. Dabei stößt man auf ein Gleichungssystem, das mit dem von Jonsson⁴⁾ angegebenen korrespondiert. Im Verlaufe der Rechnungen hat sich jedoch herausgestellt, daß man mit der folgenden Metrik besser vorankommt:

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} \delta^{\alpha\beta} + (e^v - 1) n_\alpha n_\beta & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix} \quad (g^{ik}) = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} + (e^{-v} - 1) n_\alpha n_\beta & 0 \\ 0 & e^{-\mu} \end{pmatrix} \quad (5)$$

g_{ik} ist der 4-dimensionale metrische Fundamentaltensor. Dabei ist $n_\alpha = x^\alpha/r$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist (α und β laufen von 1–3, während lateinische Indizes die Werte 1–4 annehmen). Für die Koordinaten wird zur Abkürzung geschrieben $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = ict$. Der Problemstellung entsprechend gehen wir mit folgendem Ansatz in die Feldgleichungen ein:

$$H_{\alpha\beta} = 0, \quad H_{4\alpha} = i E n_\alpha. \quad (6)$$

E ist die von der Punktladung hervorgerufene elektrische Feldstärke. Die Feldgleichungen (2)–(4) nehmen dann in der Metrik (5) die folgende Gestalt an (Strich bedeutet Ableitung nach r):

$$\left(\frac{\mu''}{2} + \frac{\lambda''}{2} + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{\lambda'^2}{4} - \frac{v'(\mu' + \lambda')}{4} - \frac{v'}{r} - \frac{1}{2} J_0^2 E^2 e^{\lambda-\mu} \right) n_\alpha n_\beta \quad (7)$$

$$+ \left(\frac{e^{-v}}{2r} (\mu' + \lambda' - v') - \frac{1 - e^{-v}}{r^2} \right) (\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) = 0,$$

$$\frac{\mu''}{2} + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu'}{r} + \frac{\mu'(\lambda' - v')}{4} - \frac{1}{2} J_0^2 E^2 e^{\lambda-\mu} = 0, \quad (8)$$

$$(E n_\alpha e^{\frac{1}{2}(3\lambda - \mu - v)})_{,\alpha} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'^2}{4} + \frac{\lambda'}{r} + \frac{\lambda'(\mu' - v')}{4} + \frac{1}{2} J_0^2 E^2 e^{\lambda-\mu} = 0. \quad (10)$$

Statt (7) kann man auch schreiben:

$$\frac{\mu''}{2} + \frac{\lambda''}{2} + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{\lambda'^2}{4} - \frac{v'}{r} - \frac{v'(\mu' + \lambda')}{4} - \frac{1}{2} J_0^2 E^2 e^{\lambda-\mu} = 0, \quad (7a)$$

$$\frac{1}{2} (\mu' + \lambda' - v') + \frac{1}{r} - \frac{e^v}{r} = 0. \quad (7b)$$

Dabei haben wir $J^2 = J_0^2 e^\lambda$ gesetzt.

⁴⁾ C. V. Jonsson, Ark. f. Fys. **3**, 87 (1951).

Dieses System erweist sich nach einigen Umformungen als mit dem von Rumer⁵⁾ angegebenen identisch. Rumer hat sein System für den speziellen Fall $\lambda + \mu + \nu = 0$ gelöst. Hier soll die allgemeinere Lösung gesucht werden. Durch Integration findet man aus (9):

$$E = \frac{a}{r^2} e^{\frac{1}{2}(\mu + \nu - 3\lambda)}. \quad (11)$$

Addiert man die Gleichungen (8) und (10), dann erhält man nach einfachen Umformungen

$$\frac{\mu'' + \lambda''}{\mu' + \lambda'} + \frac{1}{2}(\mu' + \lambda') + \frac{2}{r} - \frac{\nu'}{2} = 0 \quad (\mu' + \lambda' \neq 0) \quad (12)$$

In integrierter Form:

$$\mu' + \lambda' = \frac{C}{r^2} e^{-\frac{1}{2}(\lambda + \mu - \nu)} \quad (C \text{ Integrationskonstante}). \quad (13)$$

Der Sonderfall $\mu' + \lambda' = 0$ führt mit Hilfe von 7b) auf das Integral

$$e^{\nu} = 1 / \left(1 + \frac{\text{const}}{r^2} \right),$$

das den Schwarzschildischen Grenzfall nicht enthält; es soll deshalb nicht weiter untersucht werden.

Die Gleichungen (13) und (7b) bilden ein System, das die Funktionen $(\mu + \lambda)$ und ν zu bestimmen gestattet. Wir bedienen uns dabei der von Heckmann, Jordan und Fricke ausgearbeiteten Integrationsmethode und können die Lösungen folgendermaßen schreiben, wie man durch Einsetzen bestätigen kann:

$$e^{\nu} = \frac{4h^2}{[(h + \frac{1}{2})v^h + (h - \frac{1}{2})v^{-h}]^2}, \quad e^{\mu + \lambda} = v, \quad r = \frac{2hC}{\sqrt{v(v^{-h} - v^h)}}. \quad (14)$$

h ist eine neue Integrationskonstante. Die weiteren Integrationskonstanten wurden bereits so festgelegt, daß für $r \rightarrow \infty$ ν und $\mu + \lambda$ gegen Null gehen.

Für die geladene Punktmasse machen wir nun folgenden Ansatz:

$$e^{\mu} = v^{\frac{1}{B}} \cdot \frac{1}{\omega}, \quad e^{\lambda} = v^{1 - \frac{1}{B}} \cdot \omega, \quad (15)$$

wobei wir nun $\omega(v)$ zu bestimmen haben. Subtrahiert man von (7a) (10) und (8) und eliminiert man mit Hilfe von (7b) ν'/r , so ergibt sich:

$$\frac{\lambda' \mu'}{4} + \frac{\lambda' + \mu'}{r} - \frac{e^{\nu} - 1}{r^2} + \frac{a^2 J_0^2}{4} \frac{e^{\nu - 2\lambda}}{r^4} = 0. \quad (16)$$

Geht man in diese Gleichung mit dem Ansatz (15) ein, so erhält man die folgende Differentialgleichung für ω :

$$\left(\frac{d\omega}{dv} \right)^2 + \frac{d\omega}{dv} \frac{\omega}{v} \left(1 - \frac{2}{B} \right) - \frac{a^2 J_0^2}{C^2} v^{\frac{2}{B} - 3} = 0, \quad (17)$$

wenn man $h^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1-B}{B^2} \right)$ setzt.

⁵⁾ Ju. B. Rumer, Untersuchungen über 5-Optik, Moskau 1956.

Diese Differentialgleichung findet man bei Kamke⁶⁾, der einen Lösungsweg angibt. Im einzelnen errechnet man als Lösung, wenn man die Grenzbedingung $\omega \rightarrow 1$ für $r \rightarrow \infty$ beachtet:

$$\omega = 1 + b - b v^{\frac{2}{B}-1}, \quad (18)$$

wobei b der folgenden Bedingungsgleichung genügen muß:

$$b^2 + b - \frac{a^2 J_0^2}{C^2 \left(1 - \frac{2}{B}\right)^2} = 0. \quad (19)$$

Somit kann man die erhaltene Lösung für das elektrische und das Gravitationsfeld einer Punktmasse folgendermaßen schreiben, wenn man $\bar{r} = 2 h C$ einführt:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\bar{r}}{\sqrt{v(v^{-h} - v^h)}}, & e^v &= \frac{4 h^2}{[(h + \frac{1}{2}) v^h + (h - \frac{1}{2}) v^{-h}]^2}, \\ e^\mu &= \frac{v^{\frac{1}{B}}}{1 + b - b v^{\left(\frac{2}{B}-1\right)}}, & J &= J_0 v^{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{B}\right)} \sqrt{1 + b - b v^{\frac{2}{B}-1}}, \\ E &= - \frac{2 a h v^{\left(\frac{2}{B}-\frac{3}{2}\right)}}{r^2 \left(1 + b - b v^{\left(\frac{2}{B}-1\right)}\right)^2 [(h + \frac{1}{2}) v^h + (h - \frac{1}{2}) v^{-h}]}, & (20) \\ D &= \frac{a h J_0^2 v^{\frac{1}{2B}}}{\kappa r^2 \sqrt{1 + b - b v^{\frac{2}{B}-1}} [(h + \frac{1}{2}) v^h + (h - \frac{1}{2}) v^{-h}]} \end{aligned}$$

Auf eine eingehende Diskussion der möglichen Lösungstypen in Abhängigkeit von dem Parameter B soll hier verzichtet werden. Sie wurde in einer angefertigten Diplomarbeit ausgeführt⁷⁾. Die Funktion e^v bleibt gegenüber der Heckmannschen unverändert. Aus dem Verhalten der Funktionen e^μ , J , E und D kann man schließen, daß vermutlich die Lösungen mit $B < 0$ und $B > 2$ als physikalisch unbrauchbar zu verwerfen sind. Bei der geladenen Punktmasse können auch die Lösungen mit $\bar{r} < 0$ physikalische Bedeutung haben. Als wichtigste Aufgabe bleibt die nähere Bestimmung der restlichen Integrationskonstanten \bar{r} , B , a , J_0 . Aus (11) erkennt man, daß $a = e$ (e elektrische Ladung) zu setzen ist, und aus (3) ergibt sich die Festlegung $J_0 = \sqrt{2 \kappa}$, wobei auf das Gaußsche Maßsystem bezug genommen wurde. Somit bleiben für die weiteren Überlegungen die Integrationskonstanten \bar{r} und B frei.

Aus vielerlei Erwägungen glauben wir, daß die einfachste Lösung $B = 1$, d. h. $h = 1/2$, in der Natur eine ganz besondere Bedeutung besitzen dürfte. Aus (19) wird dann

$$b^2 + b - \frac{2 \kappa e^2}{r^2} = 0, \quad \text{also } b = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2 \kappa e^2}{r^2}}. \quad (21)$$

⁶⁾ E. Kamke, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. 1, Leipzig 1951.

⁷⁾ A. Kühnel, Diplomarbeit an der Math.-nat. Fak. Jena. 1960.

Damit schreibt sich dann unsere Gesamtlösung wegen $v = 1 - \frac{\bar{r}}{r}$:

$$e^v = \frac{1}{1 - \frac{\bar{r}}{r}}, \quad e^\mu = \frac{1 - \frac{\bar{r}}{r}}{1 + \frac{b\bar{r}}{r}}, \quad J = \sqrt{2\kappa} \sqrt{1 + \frac{b\bar{r}}{r}}, \quad (18)$$

$$E = \frac{e}{r^2 \left(1 + \frac{b\bar{r}}{r}\right)^2}, \quad D = \frac{e}{r^2 \sqrt{1 + \frac{b\bar{r}}{r}}}. \quad (19)$$

Die Wahl $B = 1$ ist äquivalent mit der Festsetzung $\mu + v + \lambda = 0$, auf die sich Rumer gleich vom Anfang an spezialisiert hat. Diese Bedingung bedeutete Verwendung spezieller Koordinaten mit $\dot{g} = 1$.

Es ist sehr interessant, daß der Verlauf des E -Feldes mit demjenigen übereinstimmt, der von E. Bagge⁸⁾ im Rahmen einer vorgeschlagenen nichtlinearen Elektrodynamik gefunden wurde. Im einzelnen erhält Bagge die folgenden Formeln:

$$E = \frac{e}{(r - r_0)^2}, \quad D = \frac{e}{r^2}. \quad (20)$$

Vergleicht man unsere Ergebnisse mit denjenigen, die für eine geladene Punktmasse aus der allgemeinen Relativitätstheorie deduziert wurden, so ergeben sich prinzipielle Abweichungen. Im Rahmen dieser Theorie folgt nämlich⁹⁾:

$$e^\mu = e^{-v} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}, \quad E = \frac{e}{r^2}. \quad (21)$$

In der projektiven Relativitätstheorie gilt im Gegensatz hierzu nicht mehr $e^\mu \cdot e^v = 1$.

In einer früheren Arbeit von einem von uns²⁾ wurden die allgemeinen Feldgleichungen vom Anfang an auf den speziell relativistischen Grenzfall spezialisiert, um den physikalischen Inhalt der untersuchten Theorie besser verstehen zu können. Die dem hier behandelten Problem entsprechenden Lösungen hatten die Gestalt:

$$J = \sqrt{2\kappa} \sqrt{\left(1 + \frac{C_2}{2\kappa r}\right)^2 - \frac{e^2 \kappa}{r^2}}, \quad (22)$$

$$E = \frac{e}{r^2} \left[\left(1 + \frac{C_2}{2\kappa r}\right)^2 - \frac{e^2 \kappa}{r^2} \right]^{-3/2}, \quad D = \frac{e}{r^2}.$$

Durch Vergleich mit (22) erkennt man eine näherungsweise Korrespondenz. Man überzeugt sich ohne Schwierigkeit, daß ähnlich wie in dem speziell-relativistischen Grenzfall auch hier die elektrische Feldenergie der Punktsingularität konvergiert. Im einzelnen folgt:

$$U^{\text{el}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty E D r^2 dr = \frac{e^2}{2} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2 \left(1 + \frac{b\bar{r}}{r}\right)^{5/2}} = \frac{e^2}{3 b \bar{r}}. \quad (23)$$

⁸⁾ E. Bagge, Z. Physik **130**, 650 (1951).

⁹⁾ A. S. Eddington, Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung, Berlin 1925.

§ 3. Periheldrehung, Rotverschiebung und Lichtablenkung im Feld einer geladenen Punktmasse

Zur Behandlung der Periheldrehung eines geladenen Teilchens im Feld einer geladenen Punktmasse haben wir auszugehen von der folgenden Bewegungsgleichung²⁾:

$$\left(\frac{4}{m_0} \frac{dx^j}{d\tau} \right)_{;i} \frac{dx^i}{d\tau} = \pm \frac{\varepsilon}{c} H_k^j \frac{dx^k}{d\tau} + \frac{\varepsilon^2}{m_0^2 c^2} \frac{J^{;j}}{J^2}, \quad (27)$$

wobei die folgende Verknüpfung besteht:

$$m_0 = m_0^5 \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{m_0^2 c^4 J^2}} \quad (28)$$

(ε Ladung des Probeteilchens, m_0^5 Ruhmasse des Probeteilchens). In diesem Paragraphen beziehen wir uns nicht auf den Fall $B = 1$, sondern knüpfen an die allgemeine Lösung (20) an. Durch die folgende Transformation

$$\begin{aligned} x^{1'} &= r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, & dx^{2'} &= d\varphi = \frac{dx^2}{r \sin \vartheta}, \\ dx^{3'} &= d\vartheta = \frac{dx^3}{r}, & t' &= t \end{aligned} \quad (29)$$

kommen wir zu der neuen Metrik in Polarkoordinaten r , φ und ϑ , die für die Diskussion der obigen Effekte gewöhnlich benutzt wird:

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^\mu \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Die Verzerrungsfunktionen μ und ν bleiben dieselben, so daß unsere Lösung in räumlichen Polarkoordinaten dieselbe Gestalt behält. In dieser Metrik lauten dann die Bewegungsgleichungen (27):

$$\begin{aligned} \ddot{r} + \frac{\nu'}{2} \dot{r}^2 - r e^{-\nu} \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 - r e^{-\nu} \dot{\vartheta}^2 + \frac{\nu' c^2}{2} e^{\mu-\nu} \dot{t}^2 \\ = \pm \frac{\varepsilon}{m_0} E \dot{t} e^{-\nu} + \frac{\varepsilon^2 J' e^{-\nu}}{m_0^2 c^2 J^3} + \frac{\varepsilon^2 J' \dot{r}^2}{m_0^2 c^4 J^3}, \\ \ddot{\varphi} + \frac{2 \dot{r} \dot{\varphi}}{r} + 2 \operatorname{ctg} \vartheta \dot{\varphi} \dot{\vartheta} = \frac{\varepsilon^2 J' \dot{r} \dot{\varphi}}{m_0^2 c^4 J^3}, \\ \ddot{\vartheta} + \frac{2 \dot{r} \dot{\vartheta}}{r} - \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 = \frac{\varepsilon^2 J' \dot{r} \dot{\vartheta}}{m_0^2 c^4 J^3}, \\ \ddot{t} + \nu' \dot{r} \dot{t} = \pm \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} e^{-\mu} E \dot{r} + \frac{\varepsilon^2 J' \dot{r} \dot{t}}{m_0^2 c^4 J^3}. \end{aligned} \quad (31)$$

(der Punkt bedeutet die Ableitung nach τ). Wir spezialisieren die Bewegung auf die Ebene $\vartheta = \pi/2$, so daß das folgende einfachere Gleichungssystem ent-

steht:

$$\ddot{r} + \frac{v'}{2} \dot{r}^2 - r \dot{\varphi}^2 e^{-v} + \frac{v' c^2}{2} e^{\mu-v} \dot{t}^2 = \pm \frac{\varepsilon E}{m_0} e^{-v} \dot{t} + \frac{\varepsilon^2 J' e^{-v}}{4 m_0^2 c^2 J^3} \pm \frac{\varepsilon^2 J' \dot{r}^2}{m_0^2 c^4 J^3},$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2 \dot{r} \dot{\varphi}}{r} = \frac{\varepsilon^2 J' \dot{r} \dot{\varphi}}{m_0^2 c^4 J^3}, \quad (32)$$

$$\ddot{t} + \mu' \dot{r} \dot{t} = \pm \frac{\varepsilon E \dot{r} e^{-\mu}}{m_0 c^2} + \frac{\varepsilon^2 J' \dot{r} \dot{t}}{m_0^2 c^4 J^3}.$$

Dazu kommt schließlich noch die Gleichung

$$e^v \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - e^\mu c^2 \dot{t}^2 = -c^2. \quad (32a)$$

Der übliche Weg besteht bekanntlich in der Integration der beiden letzten Gleichungen von (32). Diese Integrationen sind jetzt wegen der elektrischen Ladung des Probeteilchens nicht mehr durchführbar, d. h. der Flächensatz gilt nicht mehr. Aus diesem Grunde beschränken wir unsere weiteren Betrachtungen auf den Fall eines ungeladenen Probeteilchens, wofür das teilweise integrierte Gleichungssystem lautet:

$$\ddot{r} + \frac{v'}{2} \dot{r}^2 - r \dot{\varphi}^2 e^{-v} + \frac{v' c^2}{2} e^{\mu-v} \dot{t}^2 = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{h_0}{r^2}, \quad \dot{t} = C_0 e^{-\mu}. \quad (33)$$

Die Gleichung (32a) nimmt damit bei Verwendung der Substitution $u = 1/r$ die folgende Form an, wenn wir noch einmal differenzieren:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u e^{-v} + \frac{v}{2} e^{-v} - \left(\frac{c C_0}{h_0} \right)^2 \frac{e^{-(v+\mu)}}{2 u^2} (v' + \mu') + \frac{c^2}{2 h_0^2 u^2} e^{-v} v' = 0. \quad (33a)$$

Unsere nächste Aufgabe besteht jetzt darin, die in die Gleichungen eingehenden Funktionen nach $1/r$ zu entwickeln. In einzelnen folgt dann aus (20), wenn man die Entwicklung bis zur zweiten Näherung treibt und insbesondere r nach $\lambda = 1 - v$ entwickelt:

$$\frac{\bar{r}}{2 h r} = \lambda + \text{const } \lambda^3 + \dots \quad \text{also } v = 1 - \frac{\bar{r}}{2 r h},$$

$$e^v = 1 + \frac{\bar{r}}{2 h r} + \frac{\bar{r}^2}{4 h^2 r^2} \left(\frac{5}{4} - h^2 \right), \quad e^{-v} = 1 - \frac{\bar{r}}{2 h r} + \frac{\bar{r}^2}{4 h^2 r^2} \left(h^2 - \frac{1}{4} \right),$$

$$e^\mu = 1 - \frac{\bar{r}}{2 h r} \left[\frac{2b}{B} - b + \frac{1}{B} \right] + \frac{\bar{r}^2}{4 h^2 r^2} \left[\frac{4b}{B} \left(\frac{1}{B} - 1 \right) \right. \\ \left. + b \left(1 + b \right) + \frac{4b^2}{B} \left(\frac{1}{B} - 1 \right) + \frac{1}{2B} \left(\frac{1}{B} - 1 \right) \right],$$

$$e^{-\mu} = 1 + \frac{\bar{r}}{2 h r} \left[\frac{2b}{B} - b + \frac{1}{B} \right] + \frac{\bar{r}^2}{4 h^2 r^2} \left[\frac{2b}{B} - b + \frac{1}{2B} \left(1 + \frac{1}{B} \right) \right]. \quad (34)$$

Das Vorgehen ist ähnlich dem bei Heckmann, Jordan und Fricke¹⁾. Unter diesen Umständen erhält man dann für die entscheidende Bewegungsgleichung (33a):

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \left[1 - \frac{\bar{r}^2 c^2}{4 h^2 h_0^2} \left(\frac{1}{4} - h^2 \right) - \left(\frac{c C_0 \bar{r}}{2 h h_0} \right)^2 \left(h^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2B^2} - \frac{1}{2B} \right) \right] \\ - u^2 \left[\frac{3 \bar{r}}{4 h} + r^3 \text{const} \dots \right] = \frac{\bar{r} c^2}{4 h_0^2 h} + \frac{\bar{r}}{4 h} \left(\frac{1}{B} + \frac{2b}{B} - b - 1 \right) \left(\frac{c C_0}{h_0} \right)^2. \quad (35)$$

Aus dieser gewinnt man dann in der üblichen Weise für die Periheldrehung pro Umlauf:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi \bar{r}^2 c^2}{8 \hbar^2 \hbar_0^2 B^2} [2B + 1 + 3bB(2-B)] \quad (36)$$

und für die Lichtablenkung (R Sonnenradius):

$$\Delta\chi = \frac{\bar{r}}{2R\hbar B} [1 + B + b(2-B)]. \quad (37)$$

Die relativistische Rotverschiebung ergibt sich zu:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -\frac{\bar{r}}{2r} [1 + b]. \quad (38)$$

Für $B = 1$ und $b = 0$ (d. h. $e = 0$) resultieren für alle drei Effekte die Einsteinschen Werte.

In die physikalisch meßbaren Effekte gehen also gewisse, zum Teil voneinander verschiedene Kombinationen aus den Integrationskonstanten B und b ein.

Das Newtonsche Gravitationspotential Φ kann man in üblicher Weise aus g_{44} ermitteln. Es resultiert:

$$\Phi \sim -\frac{\bar{r}}{r} [1 + b(2-B)]. \quad (39)$$

Auch hier geht eine Kombination der Integrationskonstanten B und b ein. Es ist sehr problematisch, eine Aufteilung der gravitierenden Wirkung als Ursache eines mechanischen und eines elektromagnetischen Massenanteils vorzunehmen. Es empfiehlt sich in dieser Hinsicht für gewisse Überlegungen die Größe $\bar{\bar{r}} = \bar{r}(1+b)$ einzuführen, da sich dann ergibt:

$$\bar{r}b = \frac{2\kappa e^2}{\bar{r}}, \quad \bar{\bar{r}} = \bar{r} - \frac{2\kappa e^2}{\bar{r}}. \quad (40)$$

Jena, Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 21. April 1960.

Untersuchung der stabilen Kreisbewegung einer strahlenden Ladung im Betatronfeld

Von Ernst Schmutzer

Inhaltsübersicht

Es werden die näheren Bedingungen untersucht, die aus der Forderung folgen, daß sich ein punktförmiges geladenes Teilchen, welches laufend Energie abstrahlt, auf einem konstanten Kreis bewegen möge. Als Grundlage der Berechnungen des Bewegungsvorganges sowie der Abstrahlung dient dabei die Diracsche klassische relativistische Bewegungsgleichung einer strahlenden Punktladung. Bei Verwendung der Wideröe-Bedingung ergibt sich durch Integration der komplizierten Bewegungsgleichungen eine explizite Beziehung zwischen Geschwindigkeit des Teilchens und Magnetfeld. Außerdem läßt sich der zeitliche Verlauf dieser Größen angeben. Die Problematik ist vorwiegend von theoretischem Interesse.

§ 1. Allgemeine Betrachtungen

Die kovariante Behandlung der Rückwirkung des von einer punktförmigen Ladung erzeugten elektromagnetischen Feldes auf die erzeugende Ladung führte Dirac¹⁾ zu folgender Bewegungsgleichung:

$$m_0 \frac{d^2 x_m}{dt^2} = \frac{e}{c} H_{mn} \frac{dx_n}{dt} + \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{d^3 x_m}{dt^3} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 x_n}{dt^2} \frac{dx_m}{dt} \right) \quad (1)$$

(e Ladung des Teilchens, m_0 Ruhmasse des Teilchens, H_{mn} elektromagnetischer Feldstärketensor). Der Minkowski-Raum wird dabei beschrieben durch die Koordinaten: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$. Die Form der Bewegungsgleichung bezieht sich auf das Gaußsche Maßsystem. Die beiden relativistischen Strahlungsglieder haben folgende physikalische Bedeutung: Das eine besitzt die Struktur eines Reibungsgliedes und ist deshalb für die irreversible Abstrahlung verantwortlich, während das Glied mit der 3. Ableitung nach der Eigenzeit als Rückwirkungskraft zu deuten ist. Diese physikalische Interpretation wird klarer, wenn wir die 4. Gleichung von (1) als Energiebilanzgleichung betrachten. Es folgt nämlich:

$$d \left(m c^2 - \frac{2e^2}{3c} \frac{d^2 t}{dt^2} \right) = e \mathcal{E} dt - \frac{2e^2}{3c^3} \left[\left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)^2 - c^2 \left(\frac{d^2 t}{dt^2} \right)^2 \right] dt. \quad (2)$$

Aus dieser Gleichung erkennt man, daß sich die „Eigenenergie“ des Teilchens:

$$\varepsilon = m c^2 - \frac{2e^2}{3c} \frac{d^2 t}{dt^2} \quad (3)$$

¹⁾ P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) A **167**, 148 (1938).

aus einem mechanischen und einem Strahlungsanteil zusammensetzt. Außerdem liest man für die Strahlungsleistung ab:

$$Q = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left[\left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)^2 - c^2 \left(\frac{d^2 \mathbf{t}}{dt^2} \right)^2 \right] = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3} \left[\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

Für den linearen Fall hat Dirac eine exakte Behandlungsweise der Bewegungsgleichung (1) entwickelt. Wie man leicht erkennt, liegen die Schwierigkeiten bei der Integration der Bewegungsgleichung (1) vor allem in der Struktur der Strahlungsglieder. Sieht man von letzteren ab, so kann man für den uns interessierenden Fall der zirkularen Bewegung die Integrationen der Bewegungsgleichungen ziemlich weit treiben, wie dies von Kopfermann²⁾ in einem zusammenfassenden Artikel gezeigt wurde. Ähnlich wie in dieser Arbeit schreiben wir jetzt die exakte Bewegungsgleichung (1) in Zylinderkoordinaten auf und erhalten (Strich bedeutet Ableitung nach der Eigenzeit):

$$\begin{aligned} r'' - r\varphi'^2 &= \frac{e}{m_0} E_r t' + \frac{e}{m_0 c} (B_z r \varphi' - B_\varphi z') \\ &+ \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_0 c^3} (r'''' - 3 r' \varphi' \varphi'' - 3 r' \varphi'^2) - \frac{r' Q}{m_0 c^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varphi'' r + 2 \varphi' r' &= \frac{e}{m_0} E_\varphi t' + \frac{e}{m_0 c} (B_r z' - B_z r') \\ &+ \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_0 c^3} (\varphi''' r + 3 \varphi'' r' + 3 \varphi' r'' - r \varphi'^3) - \frac{r \varphi' Q}{m_0 c^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} z'' &= \frac{e}{m_0} E_z t' + \frac{e}{m_0 c} (B_\varphi r' - B_r r \varphi') + \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_0 c^3} z''' - \frac{z' Q}{m_0 c^2}, \\ r'^2 + \varphi'^2 r^2 + z'^2 - c^2 t'^2 + c^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Dabei wurde statt der zeitlichen Gleichung die einfachere für das Linienelement genommen. Außerdem ist die Strahlungsleistung in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (r''^2 + r^2 \varphi'^4 - 2 r'' r \varphi'^2 + \varphi''^2 r^2 \\ &+ 4 \varphi'^2 r'^2 + 4 \varphi'' \varphi' r' r + z''^2 - c^2 t''^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Bei der Komponentenaufspaltung der Bewegungsgleichung wurden die folgenden Zerlegungsformeln verwendet (\mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ , \mathbf{t} orthogonale Einheitsvektoren):

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= e_r E_r + e_\varphi E_\varphi + \mathbf{t} E_z, \quad \mathfrak{B} = e_r B_r + e_\varphi B_\varphi + \mathbf{t} B_z, \\ r'' &= e_r (r'' - r \varphi'^2) + e_\varphi (\varphi'' r + 2 \varphi' r') + \mathbf{t} z'', \\ r''' &= e_r (r''' - 3 r' \varphi' \varphi'' - 3 r' \varphi'^2) + e_\varphi (\varphi''' r + 3 \varphi'' r' + 3 \varphi' r'' - r \varphi'^3) + \mathbf{t} z'''. \end{aligned} \quad (10)$$

§ 2. Bewegung auf einem in der Mittelebene konzentrisch gelegenen Kreis

Da man aus dem Gleichungssystem (5)–(8) kaum allgemeine Schlüsse ziehen kann, so fordern wir, daß die Teilchenbewegung auf einem konstanten, in der Mittelebene gelegenen Kreis (Sollkreis) erfolgen möge, d. h. wir spezialisieren dieses Gleichungssystem auf den Fall $r = r_s$, $z = 0$. Außerdem setzen wir: $E_z = E_r = E_\varphi = B_r = 0$ (Betatronfeld für $z = 0$). Nach diesen Verein-

²⁾ H. Kopfermann, Ergebnisse der exakten Naturwiss. **22**, 13 (1949).

fachungen lauten dann die Bewegungsgleichungen, wenn wir für $z = 0$ schreiben: $B_z = B_s$ und $E_\varphi = E_s$ und die Abkürzung $\alpha = \frac{r_s^2}{c^2}$ verwenden:

$$\varphi' = -\frac{e B_s}{m_0 c} + \frac{2 e^2}{m_0 c^3} \varphi'', \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \varphi'' = & \frac{e E_s}{m_0 r_s} t' + \frac{2 e^2}{3 m_0 c^3} \varphi''' - \frac{2 e^2}{3 m_0 c^3} \varphi'^3 - \frac{2 e^2 \alpha}{3 m_0 c^3} \varphi'^5 - \frac{2 e^2 \alpha}{3 m_0 c^3} \varphi' \varphi''^2 \\ & + \frac{2 e^2}{3 m_0 c^3} \varphi' t'^2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\varphi'^2 \alpha - t'^2 + 1 = 0. \quad (13)$$

Aus (13) folgen die Relationen

$$a) \quad t' = \sqrt{1 + \alpha \varphi'^2}, \quad b) \quad t'' = \alpha \varphi' \varphi'' / \sqrt{1 + \alpha \varphi'^2}, \quad (14)$$

mit deren Hilfe wir (12) einfacher schreiben können:

$$\begin{aligned} \varphi'' (1 + \alpha \varphi'^2) - \frac{e E_s}{m_0 r_s} (1 + \alpha \varphi'^2)^{3/2} - \frac{2 e^2 \varphi'''}{3 m_0 c^3} (1 + \alpha \varphi'^2) + \frac{2 e^2 \varphi'^3}{3 m_0 c^3} (1 + \alpha \varphi'^2) \\ + \frac{2 e^2 \alpha \varphi'^5}{3 m_0 c^3} (1 + \alpha \varphi'^2) + \frac{2 e^2 \alpha}{3 m_0 c^3} \varphi''^2 \varphi' = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Die voneinander unabhängigen und hier zur Diskussion stehenden Gleichungen sind gegeben durch (11), (14b) und (15). Aus den Maxwell-Gleichungen folgt schließlich noch wegen der oben gemachten Symmetrievoraussetzungen:

$$E_s = -\frac{1}{r_s c} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{r_s} B_z \varrho \, d\varrho. \quad (16)$$

Damit haben wir insgesamt 4 Gleichungen für die 5 Größen φ , t , E_s , B_s , B_z . Eine 5. Verknüpfungsgleichung verschaffen wir uns dadurch, daß wir uns auf ein Magnetfeld beziehen, das der Wideröe-Bedingung genügt:

$$B_s = \frac{1}{2\pi r_s^2} \int_0^{r_s} B_z \, 2\pi \varrho \, d\varrho. \quad (17)$$

Aus (16) und (17) resultiert dann:

$$E_s = -\frac{r_s}{c} \dot{B}_s \quad (18)$$

(Punkt bedeutet Ableitung nach der Zeit t). Aus (11) ergibt sich damit:

$$\varphi' - \frac{e E_s}{m_0 r_s} \sqrt{1 + \alpha \varphi'^2} - \frac{2 e^2 \varphi''}{m_0 c^3} = 0. \quad (19)$$

Unter diesen Umständen vereinfacht sich (15) zu:

$$2 \varphi'' + 2 \alpha \varphi^2 \varphi'' + \varphi^3 + 2 \alpha \varphi^5 + \alpha^2 \varphi^7 + \alpha \varphi'^2 \varphi = 0. \quad (20)$$

Zur Abkürzung haben wir gesetzt: $\varphi' = \Phi$.

Für die zeitliche Winkeländerung ist damit eine hochgradig nichtlineare Differentialgleichung entstanden, die bemerkenswerterweise nicht mehr die Teilchenmasse und Teilchenladung enthält.

Eine einfache Lösung von (20) ist $\Phi = \pm i/\sqrt{\alpha}$, die aber aus physikalischen Gründen unbrauchbar ist. Eine physikalisch sinnvolle Lösung erhält man

nach Kamke³⁾, indem man (20) mit $2(1 + \alpha \Phi^2)^{-1/2} \Phi'$ durchmultipliziert. Es resultiert dann nämlich:

$$d[(1 + \alpha \Phi^2)^{1/2} \Phi^3] + \Phi^3(1 + \alpha \Phi^2)^{3/2} d\Phi = 0, \quad (21)$$

woraus durch einfache Integration folgt:

$$\Phi^3 = A(1 + \alpha \Phi^2)^{-1/2} - \frac{1}{7\alpha^2} \left(\alpha \Phi^2 - \frac{2}{5} \right) (1 + \alpha \Phi^2)^2. \quad (22)$$

(A Integrationskonstante). Führt man in dieser Gleichung die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ als neue abhängige Variable ein, so ergibt sich:

$$\omega^2 = (1 - \alpha \omega^2) \left[A(1 - \alpha \omega^2)^{7/2} + \frac{1}{5\alpha^2} \left(\frac{2}{7} - \alpha \omega^2 \right) \right]. \quad (23)$$

Diese Gleichung beschreibt also den zeitlichen Verlauf der Winkelgeschwindigkeit.

Lösen wir (11) nach B_s auf, so erhalten wir mit Hilfe von (23):

$$\frac{e B_s}{m_0 c} = -\frac{\omega}{\sqrt{1 - \alpha \omega^2}} + \frac{2e^2}{m_0 c^2} \sqrt{A(1 - \alpha \omega^2)^{1/2} + \frac{1}{5\alpha^2} \left(\frac{2}{7} - \alpha \omega^2 \right) (1 - \alpha \omega^2)^3}. \quad (24)$$

Diese Formel gibt an, in welcher Weise sich die magnetische Induktion mit der Winkelgeschwindigkeit ändern muß, damit das Teilchen auf einem Kreis bleibt. Schließlich können wir vermöge (23) auch noch den Verlauf der Eigenenergie (3) berechnen:

$$\varepsilon = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \alpha \omega^2}} - \frac{2e^2 \alpha \omega}{3c} \sqrt{A(1 - \alpha \omega^2)^{1/2} + \frac{1}{5\alpha^2} \left(\frac{2}{7} - \alpha \omega^2 \right) (1 - \alpha \omega^2)^3}. \quad (25)$$

Aus (23) erkennt man, daß die Bewegung des Teilchens mit einer endlichen Winkelbeschleunigung beginnt, die sich aus (23) zu

$$\dot{\omega}|_{\omega=0} = \sqrt{A + \frac{2}{35\alpha^2}} \quad (26)$$

berechnet. Im Laufe der Bewegung nimmt die Winkelbeschleunigung auf den Wert Null ab; an dieser Stelle liegt der höchste physikalisch sinnvolle Wert ω_M für die Winkelgeschwindigkeit, den man aus der folgenden Formel berechnen kann:

$$A(1 - \alpha \omega_M^2)^{7/2} + \frac{1}{5\alpha^2} \left(\frac{2}{7} - \alpha \omega_M^2 \right) = 0. \quad (27)$$

Die magnetische Induktion besitzt zu Beginn der Bewegung den Wert:

$$B_s|_{\omega=0} = \frac{2e}{c^2} \sqrt{A + \frac{2}{35\alpha^2}} \quad (28)$$

und erreicht am Ende der Beschleunigungsperiode den Wert:

$$B_{sM} = -\frac{m_0 c}{e} \frac{\omega_M}{\sqrt{1 - \alpha \omega_M^2}}, \quad (29)$$

während die Eigenenergie die Bewegung mit dem Wert:

$$\varepsilon|_{\omega=0} = m_0 c^2 \quad (30)$$

³⁾ E. Kamke, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig 1944, S. 594.

beginnt und mit dem Wert:

$$\varepsilon_M = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \alpha \omega_M^2}} \quad (31)$$

abschließt.

Löst man (29) nach der maximalen Geschwindigkeit $v_M = r_s \omega_M$ auf, so erhält man folgenden Zusammenhang mit der maximalen magnetischen Induktion:

$$\frac{v_M}{c} = \left(1 + \frac{m_0^2 c^4}{e^2 r_s^2 B_{sM}^2}\right)^{-1/2} < 1. \quad (32)$$

Eliminiert man aus (29) und (31) ω_M , so erhält man folgende Beziehung zwischen B_{sM} und ε_M :

$$\varepsilon_M = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\alpha e^2 B_{sM}^2}{m_0^2 c^4}}, \quad (33)$$

die in der Theorie ohne Strahlung von gleicher Form ist. Ein gewisses Interesse besitzt schließlich noch der Verlauf der Strahlungsleistung, für die sich aus (9) nach einigen Umformungen bei Benutzung von (23) ergibt:

$$Q = \frac{2 e^2 r_s^2}{3 c^3 (1 - \alpha \omega^2)^3} \left[\omega^4 + A (1 - \alpha \omega^2)^{7/2} + \frac{1}{5 \alpha^2} \left(\frac{2}{7} - \alpha \omega^2 \right) \right]. \quad (34)$$

Daraus folgt für den Beginn der Bewegung:

$$Q|_{\omega=0} = \frac{2 e^2 r_s^2}{3 c^3} \left(A + \frac{2}{35 \alpha^2} \right) \quad (35)$$

und für das Ende der Beschleunigung:

$$Q_M = \frac{2 e^2 r_s^2 \omega_M^4}{3 c^3 (1 - \alpha \omega_M^2)^2} = \frac{2 e^6 r_s^2 B_{sM}^4}{3 m_0^4 c^7}. \quad (36)$$

§ 3. Anfangsbedingungen und Näherungsbehandlung

Durch Integration der Bewegungsgleichung haben wir in (23) die Integrationskonstante A erhalten, die wir nun näher festzulegen haben. Durch Reihenentwicklung von (23) ergibt sich:

$$\frac{\dot{\omega}^2}{(1 - \alpha \omega^2)^4} = \left(\frac{2}{35 \alpha^2} + A \right) - \frac{\alpha \omega^2}{2} \left(\frac{2}{35 \alpha^2} + A \right) - \frac{\alpha^2 \omega^4}{8} \left(\frac{2}{35 \alpha^2} + A \right) + \dots \quad (37)$$

Aus dieser Entwicklung folgert man, daß aus physikalischen Gründen die Ungleichung

$$A + \frac{2}{35 \alpha^2} > 0 \quad (38)$$

bestehen muß, so daß die Bewegung mit einer nichtverschwindenden Anfangsbeschleunigung und einem nichtverschwindenden Anfangsmagnetfeld einsetzen muß. Mit Hilfe von (27) und (29) kann man A durch B_{sM} ausdrücken und erhält:

$$A = \frac{2}{35 \alpha^2} \left(\frac{5}{2} \frac{e^2 r_s^2 B_{sM}^2}{m_0^2 c^4} - 1 \right) \left(1 + \frac{e^2 r_s^2 B_{sM}^2}{m_0^2 c^4} \right)^{5/2}. \quad (39)$$

Eine gute Näherung dafür ist:

$$A = \frac{e^2 r_s^2 B_{sM}^2}{7 m_0^2 c^{10}}, \quad (40)$$

da $e r_s B_{sM} \gg m_0 c^2$ ist, wenn man sich auf Elektronen bezieht.

Eine weitere Abschätzung ergibt:

$$A \left(\frac{2}{35 \alpha^2} \right) = \frac{5}{2} \left(\frac{e r_s B_{sM}}{m_0 c^2} \right)^2 \gg 1, \quad (41)$$

so daß wir statt (26), (28) und (35) schreiben können:

$$\dot{\omega}|_{\omega=0} = \sqrt{\frac{e^2 r_s^2 B_{sM}^2}{7 m_0^2 c^{10}}}, \quad (42)$$

$$B_s|_{\omega=0} = 2 \sqrt{\frac{e^3 r_s^3 B_{sM}^2}{7 m_0^2 c^{14}}}, \quad (43)$$

$$Q|_{\omega=0} = \frac{2 e^3 r_s^3 B_{sM}^2}{21 m_0^2 c^{13}}. \quad (44)$$

Die Magnetfelder für den Beginn und das Ende des Beschleunigungsvorganges stehen also im Verhältnis:

$$\frac{B_s|_{\omega=0}}{B_{sM}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \frac{e}{r_s^2 B_{sM}} \left(\frac{e r_s B_{sM}}{m_0 c^2} \right)^{7/2}. \quad (45)$$

Für gewöhnliche Betatrons ist der Zahlenwert für dieses Verhältnis sehr klein und der Zahlenwert für die Anfangsbeschleunigung außerordentlich groß.

In der eben gemachten Näherung gelingt es nun auch, den zeitlichen Verlauf der interessierenden Größen approximativ anzugeben: Wegen (41) können wir nämlich für (23) schreiben:

$$\dot{\omega} = \sqrt{A} (1 - \alpha \omega^2)^{9/4} \quad (46)$$

oder in Integralform:

$$t = t_0 + \frac{1}{\sqrt{A \alpha}} \int_0^{\omega \sqrt{\alpha}} \frac{d\eta}{(1 - \eta^2)^{9/4}} \quad (47)$$

(ungenau gegen Ende der Beschleunigungsperiode).

Substituiert man $\eta = \sin \lambda$, so resultiert:

$$t = t_0 + \frac{1}{\sqrt{A \alpha}} \int \frac{d\lambda}{\cos^{7/2} \lambda}. \quad (48)$$

Nach Meyer zur Capellen⁴⁾ ist:

$$\int \frac{d\lambda}{\cos^{7/2} \lambda} = \frac{2 \sin \lambda}{5 \cos^{5/2} \lambda} + \frac{6 \sin \lambda}{5 \sqrt{\cos \lambda}} - \frac{6 \sqrt{2}}{5} \left[E\left(\frac{\pi}{4}, \varphi\right) - \frac{1}{2} F\left(\frac{\pi}{4}, \varphi\right) \right] \quad (49)$$

$$(\cos \varphi = \sqrt{\cos \lambda}),$$

so daß man schreiben kann:

$$t = t_0 + \frac{1}{\sqrt{A \alpha}} \left[\frac{3 \sin \lambda}{5 \cos^{5/2} \lambda} + \frac{6 \sin \lambda}{5 \sqrt{\cos \lambda}} - \frac{6 \sqrt{2}}{5} \left\{ E\left(\frac{\pi}{4}, \varphi\right) - \frac{1}{2} F\left(\frac{\pi}{4}, \varphi\right) \right\} \right]. \quad (50)$$

⁴⁾ W. Meyer zur Capellen, Integraltafeln. Springer-Verlag, Berlin 1950.

Eine übersichtlichere Näherung verschafft man sich dadurch, daß man in (47) den Exponenten $9/4$ durch 2 ersetzt. Man erhält dann:

$$t = t_0 + \frac{1}{2\sqrt{A}\alpha} \left[\frac{\sqrt{\alpha}\omega}{1 - \alpha\omega^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\alpha}\omega}{1 - \sqrt{\alpha}\omega} \right]. \quad (51)$$

Wir verzichten auf eine weitere Näherungsbehandlung des Problems und stellen lediglich noch fest, daß eine Abschätzung zeigt, daß die Beschleunigungszeit für ein Teilchen, das bei Energieabstrahlung auf einem Kreis bleiben soll, außerordentlich klein ist.

Jena, Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 5. Mai 1960.

Der Einfluß der Elektronenhülle des streuenden Atoms auf den Asymmetrieeffekt

Von T. Tietz

Inhaltsübersicht

Die in dieser Arbeit entwickelte Methode zur Berechnung der Streuung von schnellen Elektronen am Thomas-Fermischen Kraftfeld läßt sich auch zur Untersuchung des Einflusses der Elektronenhülle des streuenden Atoms auf den Asymmetrieeffekt anwenden.

Sauter¹⁾ hat den Fall der zweimaligen Streuung von schnellen Elektronen an einem zentralsymmetrischen Kraftfeld betrachtet. Die Intensitätsverteilung J nach zweimaliger Streuung ist in der Sauterschen Arbeit durch folgende Formel gegeben.

$$J = \frac{J_0}{R_1^2 R_2^2} \left(\frac{2e^2 Z}{m v^2} \right)^4 \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \right) \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \right) U^2(\vec{e}_0, \vec{e}_1) U^2(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{16 \pi^2} \cdot \frac{\beta^2 (1 - \beta^2) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi}{\left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \right) \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \right)} \cdot \frac{W(\vec{e}_0, \vec{e}_1) W(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{U(\vec{e}_0, \vec{e}_1) U(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \right] \quad (1)$$

Es seien \vec{e}_0, \vec{e}_1 und \vec{e}_2 die Einheitsvektoren in den Richtungen des einfallenden, des einmal und zweimal gestreuten Strahles, R_1 und R_2 bedeuten den Abstand des zweiten Streuzentrums vom ersten, bzw. den Abstand des zweiten Streuzentrums vom Beobachter. In dieser Formel seien θ_1 und θ_2 die beiden Streuwinkel und φ ist der Winkel zwischen den beiden Streuebene. J_0 ist die Intensität der primären Elektronen, Z ist die Ordnungszahl, e ist die Elektronenladung, m ist die Elektronenmasse, v ist die Elektronengeschwindigkeit und α ist die Feinstrukturkonstante. β ist gleich $\beta = \frac{v}{c}$ und c ist die Lichtgeschwindigkeit. Die Matricelemente W und U sind für das Thomas-Fermische Feld durch folgende Ausdrücke gegeben.

$$U(\vec{e}_0, \vec{e}_1) = \int_0^\infty \varphi \left(\frac{y \hbar}{\mu p} \right) \frac{\sin \left(2 y \sin \frac{\theta_1}{2} \right)}{\sin \frac{\theta_1}{2}} dy$$

$$U(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \int_0^\infty \varphi \left(\frac{y \hbar}{\mu p} \right) \frac{\sin \left(2 y \sin \frac{\theta_2}{2} \right)}{\sin \frac{\theta_2}{2}} dy \quad (2)$$

¹⁾ F. Sauter, Ann. Physik 18, 61 (1933).

und

$$W(\vec{e}_0, \vec{e}_1) = \int \left[1 - \frac{\vec{e}' \cdot (\vec{e}_0 + \vec{e}_1)}{1 + \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1} \right] U(\vec{e}_1, \vec{e}') U(\vec{e}', \vec{e}_0) d\Omega'$$

$$W(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \int \left[1 - \frac{\vec{e}' \cdot (\vec{e}_0 + \vec{e}_2)}{1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2} \right] U(\vec{e}_1, \vec{e}') U(\vec{e}', \vec{e}_2) d\Omega' \quad (3)$$

φ ist die Thomas-Fermische-Funktion des freien neutralen Atoms.²⁾ Bezeichnet man mit \vec{p}_0 den Impuls der primären Elektronen, so bedeutet p in (2) wegen des Energiesatzes $\vec{p}_0^2 = p^2$, weiter ist in (2) \hbar die Plancksche Konstante und $\mu = 0,88534 a_0 Z^{-1/3}$. In dieser Formel für μ bedeutet a_0 den kleinsten Bohrschen Wasserstoffradius. $d\Omega'$ in (3) bedeutet ein Raumwinklelement im Impulsraum. Setzt man für die Thomas-Fermi-Funktion φ die Rozental-sche³⁾ Approximation

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^3 c_i e^{-b_i x} \quad (4)$$

und führt man weiter folgende Abkürzungen ein

$$\gamma_i = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar b_i}{p \mu} \right)^2, \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

so bekommt man für die Matrixelemente $U(\vec{e}_0, \vec{e}_1)$ und $U(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ folgende Ausdrücke:

$$U(\vec{e}_0, \vec{e}_1) = \frac{c_1}{2(\gamma_1 - \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1)} + \frac{c_2}{2(\gamma_2 - \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1)} + \frac{c_3}{2(\gamma_3 - \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1)}$$

und

$$U(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{c_1}{2(\gamma_1 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)} + \frac{c_2}{2(\gamma_2 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)} + \frac{c_3}{2(\gamma_3 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)} \quad (6)$$

Die Konstanten c_i und b_i , welche in der Rozental-schen Approximation vorkommen, sind durch folgende Werte gegeben: $c_1 = 0,255$, $c_2 = 0,581$, $c_3 = 0,164$ und $b_1 = 0,246$, $b_2 = 0,947$, $b_3 = 4,356$. Die letzte Formel erlaubt uns die Matrixelemente $W(\vec{e}_0, \vec{e}_1)$ und $W(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ zu berechnen, welche in den Formeln (3) vorkommen. Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems, lassen sich diese Integrale leicht berechnen. Für $W(\vec{e}_0, \vec{e}_1)$ im Polarkoordinatensystem mit der Polarachse in der Richtung $\vec{e}_0 + \vec{e}_1$ läßt sich die Integration über verschiedene Richtungen von \vec{e}' leicht ausführen und ergibt wegen $\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 = \cos \theta_1$ folgende Formel für $W(\vec{e}, \vec{e}_1)$.

²⁾ P. Gombás, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, Wien 1949.

³⁾ S. Rozental, Z. Physik 98, 42 (1933).

$$\begin{aligned}
 W(\vec{e}_0, \vec{e}_1) = & \frac{\pi}{2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^3 c_i^2 \ln \frac{\gamma_i + 1}{\gamma_i - 1} - \frac{(\gamma_i - \cos^2 \frac{\theta_1}{2}) c_i^2}{\sin \frac{\theta_1}{2}} \left| \frac{\gamma_i^2 - \cos^2 \frac{\theta_1}{2}}{\gamma_i^2 - \cos^2 \frac{\theta_1}{2}} + \sin \frac{\theta_1}{2} \right| \right. \\
 & + \frac{c_1 c_3 \pi}{2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}} \left[\ln \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} + \ln \frac{\gamma_3 + 1}{\gamma_3 - 1} \right] + \frac{c_1 c_3 \pi}{2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}} \left[\ln \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} + \ln \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} \right] \\
 & + \frac{c_1 c_3 \pi}{2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}} \left[\ln \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} + \ln \frac{\gamma_3 + 1}{\gamma_3 - 1} \right] + \frac{c_2 c_3 \pi}{2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}} \left[\ln \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} + \ln \frac{\gamma_3 + 1}{\gamma_3 - 1} \right] \\
 & - \frac{c_1 c_3 \pi (\gamma_1 + \gamma_2 - 2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2})}{2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}} \left| \frac{\gamma_1}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2 - (\gamma_1 \gamma_2 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2})} \right| 4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \\
 & \cdot \left[\ln \frac{A_1}{A_2} + \ln \frac{B_1}{B_2} \right] - \frac{c_1 c_3 \pi (\gamma_1 + \gamma_3 - 2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2})}{2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}} \left| \frac{\gamma_1}{(\gamma_1 + \gamma_3)^2 - (\gamma_1 \gamma_3 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2})} \right| 4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \\
 & \cdot \left[\ln \frac{A_1}{C_3} + \ln \frac{D_1}{D_2} \right] \quad (7)
 \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
 & - \frac{c_2 c_3 \pi (\gamma_2 + \gamma_3 - 2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2})}{2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}} \left| \frac{\gamma_1}{(\gamma_1 + \gamma_3)^2 - (\gamma_1 \gamma_3 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2})} \right| 4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \\
 & \cdot \left[\ln \frac{E_1}{E_2} + \ln \frac{F_1}{F_2} \right]
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 A_1 = & \frac{[\gamma_1 (\gamma_1 - \gamma_2) - 2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}] \cos \frac{\theta_1}{2} + (\gamma_1 + \gamma_2 - 2 \gamma_1 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}) + (\gamma_1 - \cos^2 \frac{\theta_1}{2})}{2 \cos \frac{\theta_1}{2} - (\gamma_1 + \gamma_2)} \left| \frac{\theta_1}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2 - (\gamma_1 \gamma_2 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2})} \right| 4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \\
 A_2 = & - \frac{[\gamma_1 (\gamma_1 - \gamma_2) - 2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}] \cos \frac{\theta_1}{2} + (\gamma_1 + \gamma_2 - 2 \gamma_1 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}) - (\gamma_1 + \cos^2 \frac{\theta_1}{2})}{2 \cos \frac{\theta_1}{2} + (\gamma_1 + \gamma_2)} \left| \frac{\theta_1}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2 - (\gamma_1 \gamma_2 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2})} \right| 4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \\
 B_1 = & \frac{[\gamma_2 (\gamma_2 - \gamma_1) - 2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}] \cos \frac{\theta_1}{2} + (\gamma_1 + \gamma_2 - 2 \gamma_2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}) + (\gamma_2 - \cos^2 \frac{\theta_1}{2})}{2 \cos \frac{\theta_1}{2} - (\gamma_1 + \gamma_2)} \left| \frac{\theta_1}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2 - (\gamma_1 \gamma_2 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2})} \right| 4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \\
 B_2 = & - \frac{[\gamma_2 (\gamma_2 - \gamma_1) - 2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}] \cos \frac{\theta_1}{2} + (\gamma_1 + \gamma_2 - 2 \gamma_2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}) - (\gamma_2 + \cos^2 \frac{\theta_1}{2})}{2 \cos \frac{\theta_1}{2} + (\gamma_1 + \gamma_2)} \left| \frac{\theta_1}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2 - (\gamma_1 \gamma_2 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2})} \right| 4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}
 \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{-\left[\gamma_2(\gamma_2 - \gamma_1) - 2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right] \cos \frac{\theta_1}{2} + \left(\gamma_1 + \gamma_2 - 2 \gamma_2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}\right) - \left(\gamma_2 + \cos \frac{\theta_1}{2}\right) \left| \left(\gamma_1 + \gamma_2\right)^2 - \left(\gamma_1 \gamma_2 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right) 4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \right|}{2 \cos \frac{\theta_1}{2} + (\gamma_1 + \gamma_2)} \\
C_1 &= \frac{\left[\gamma_1(\gamma_1 - \gamma_3) - 2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right] \cos \frac{\theta_1}{2} + \left(\gamma_1 + \gamma_3 - 2 \gamma_1 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}\right) + \left(\gamma_1 - \cos \frac{\theta_1}{2}\right) \left| \left(\gamma_1 + \gamma_2\right)^2 - \left(\gamma_1 \gamma_3 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right) 4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \right|}{2 \cos \frac{\theta_1}{2} - (\gamma_1 + \gamma_2)} \\
C_2 &= \frac{-\left[\gamma_1(\gamma_1 - \gamma_3) - 2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right] \cos \frac{\theta_1}{2} + \left(\gamma_1 + \gamma_3 - 2 \gamma_1 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}\right) - \left(\gamma_1 + \cos \frac{\theta_1}{2}\right) \left| \left(\gamma_1 + \gamma_2\right)^2 - \left(\gamma_1 \gamma_3 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right) 4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \right|}{2 \cos \frac{\theta_1}{2} + (\gamma_1 + \gamma_2)} \\
D_1 &= \frac{\left[\gamma_3(\gamma_3 - \gamma_1) - 2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right] \cos \frac{\theta_1}{2} + \left(\gamma_1 + \gamma_3 - 2 \gamma_3 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}\right) + \left(\gamma_3 - \cos \frac{\theta_1}{2}\right) \left| \left(\gamma_1 + \gamma_3\right)^2 - \left(\gamma_1 \gamma_3 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right) 4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \right|}{2 \cos \frac{\theta_1}{2} - (\gamma_1 + \gamma_2)} \\
D_2 &= \frac{-\left[\gamma_3(\gamma_3 - \gamma_1) - 2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right] \cos \frac{\theta_1}{2} + \left(\gamma_1 + \gamma_3 - 2 \gamma_3 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}\right) - \left(\gamma_3 + \cos \frac{\theta_1}{2}\right) \left| \left(\gamma_1 + \gamma_3\right)^2 - \left(\gamma_1 \gamma_3 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right) 4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \right|}{2 \cos \frac{\theta_1}{2} + (\gamma_1 + \gamma_2)} \\
E_1 &= \frac{\left[\gamma_2(\gamma_2 - \gamma_3) - 2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right] \cos \frac{\theta_1}{2} + \left(\gamma_2 + \gamma_3 - 2 \gamma_2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}\right) + \left(\gamma_2 - \cos \frac{\theta_1}{2}\right) \left| \left(\gamma_2 + \gamma_3\right)^2 - \left(\gamma_2 \gamma_3 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right) 4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \right|}{2 \cos \frac{\theta_1}{2} - (\gamma_2 + \gamma_3)} \\
E_2 &= \frac{-\left[\gamma_2(\gamma_2 - \gamma_3) - 2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right] \cos \frac{\theta_1}{2} + \left(\gamma_2 + \gamma_3 - 2 \gamma_2 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}\right) - \left(\gamma_2 + \cos \frac{\theta_1}{2}\right) \left| \left(\gamma_2 + \gamma_3\right)^2 - \left(\gamma_2 \gamma_3 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right) 4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \right|}{2 \cos \frac{\theta_1}{2} + (\gamma_2 + \gamma_3)} \\
F_1 &= \frac{\left[\gamma_3(\gamma_3 - \gamma_2) - 2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right] \cos \frac{\theta_1}{2} + \left(\gamma_2 + \gamma_3 - 2 \gamma_3 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}\right) + \left(\gamma_3 - \cos \frac{\theta_1}{2}\right) \left| \left(\gamma_2 + \gamma_3\right)^2 - \left(\gamma_2 \gamma_3 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right) 4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \right|}{2 \cos \frac{\theta_1}{2} - (\gamma_2 + \gamma_3)} \\
F_2 &= \frac{-\left[\gamma_3(\gamma_3 - \gamma_2) - 2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right] \cos \frac{\theta_1}{2} + \left(\gamma_2 + \gamma_3 - 2 \gamma_3 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}\right) - \left(\gamma_3 + \cos \frac{\theta_1}{2}\right) \left| \left(\gamma_2 + \gamma_3\right)^2 - \left(\gamma_2 \gamma_3 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right) 4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \right|}{2 \cos \frac{\theta_1}{2} + (\gamma_2 + \gamma_3)}
\end{aligned}
\tag{8}$$

Die Formeln (7) und (8) erlauben uns auch $W(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ zu berechnen, man braucht nur 1 durch 2 zu ersetzen. Die letzten Formeln für W und die früheren Formeln für U erlauben uns die Intensitätsverteilung J nach zweimaliger Streuung zu berechnen. Der Faktor von $\cos \varphi$ im Klammerausdruck von (1) gibt uns die Asymmetrie δ_H des Thomas-Fermischen Feldes.

$$\delta_H = \frac{\alpha^2 Z^2}{16\pi^2} \frac{\beta^2 (1 - \beta^2) \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right) \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2}\right)} \frac{W(\vec{e}_0, \vec{e}_1) W(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{U(\vec{e}_0, \vec{e}_1) U(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \quad (9)$$

Für $\lim \gamma_i \rightarrow 1$ und $\sum_{i=1}^3 c_i = 1$ vereinfachen sich unsere Formeln für $U(\vec{e}_0, \vec{e}_1)$,

$U(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ und $W(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ $W(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ wesentlich.

$$\begin{aligned} [U(\vec{e}_0, \vec{e}_1)]_{\gamma_i \rightarrow 1} &= \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}} \\ [U(\vec{e}_1, \vec{e}_2)]_{\gamma_i \rightarrow 1} &= \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\theta_2}{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

und

$$\begin{aligned} [W(\vec{e}_0, \vec{e}_1)]_{\gamma_i \rightarrow 1} &= -\frac{\ln \left(\sin \frac{\theta_1}{2} \right)}{\cos^2 \frac{\theta_1}{2}} \\ [W(\vec{e}_1, \vec{e}_2)]_{\gamma_i \rightarrow 1} &= -\frac{\ln \left(\sin \frac{\theta_2}{2} \right)}{\cos^2 \frac{\theta_2}{2}} \end{aligned} \quad (11)$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Formel (1) ein, so bekommen wir für die Intensitätsverteilung J_e nach zweimaliger Streuung von Elektronen an Coulombfeld.

$$\begin{aligned} J_e &= \frac{J_0}{R_1^2 R_2^2} \left(\frac{e^2 Z}{2 m v^2} \right)^4 (1 - \beta^2)^2 \frac{1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}}{\sin^4 \frac{\theta_1}{2}} \frac{1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2}}{\sin^4 \frac{\theta_2}{2}} \\ &\quad \left[1 + \alpha^2 Z^2 \beta^2 (1 - \beta^2) \frac{\sin^2 \frac{\theta_1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_1}{2} \ln \left(\sin \frac{\theta_1}{2} \right)}{1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}} \frac{\sin^2 \frac{\theta_2}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_2}{2} \ln \left(\sin \frac{\theta_2}{2} \right)}{1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2}} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Diese Formel zeigt, daß der Faktor von $\cos \varphi$ im Klammerausdruck von (12) genau mit der Asymmetrie δ_0 übereinstimmt. Diese Asymmetrie für das Coulomb-Feld hat Mott unter Verwendung der strengen Lösungen der Dirac-Gleichungen bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in $\alpha^2 Z^2$ abgeleitet.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. P. Gombás für die Freundlichkeit, sein Institut besuchen zu können, meinen herzlichen Dank aussprechen.

Lódź, Institut für Theoretische Physik der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 5. Mai 1960.

Der Einfluß der Elektronenhülle auf die Bremsstrahlung in der Hartreeschen und Thomas-Fermischen Theorie des Atoms

Von T. Tietz

Inhaltsübersicht

Es wird hier der Einfluß der Elektronenhülle auf die unrelativistische Theorie des kontinuierlichen Röntgenspektrums untersucht. Wir leiten in dieser Arbeit geschlossene Ausdrücke; für die Intensität der unpolarisierten Strahlung, für die gesamte, in das Frequenzintervall entfallende, emittierte Energie und die gesamte beim Bremsprozeß emittierte Energie ab. In dieser Arbeit wird auch der Übergang dieser Ausdrücke zum Falle des reinen Coulomb-Feldes untersucht.

In dieser Arbeit soll untersucht werden, welchen Einfluß auf die Bremsstrahlung die Elektronenhülle des bremsenden Hartreeschen oder Thomas-Fermischen Atoms besitzt. Dabei wollen wir den Fall ausschließen, daß das Hartreesche oder Thomas-Fermische Atom beim Bremsprozeß selbst einen Teil der Energie des gebremsten Elektrons übernimmt. Schließen wir die Möglichkeit einer Anregung des bremsenden Atoms aus, so können wir die Wirkung von Kern und Elektronenhülle auf das Kathodenstrahlelektron durch das Hartreesche $V_H(r)$ oder Thomas-Fermische Potential $V_{T,F}(r)$ beschreiben.

$$V_H(r) = -\frac{e^2 Z}{r} (Z_p/Z) \quad \text{oder} \quad V_{T,F}(r) = -\frac{e^2 Z}{r} \Phi\left(\frac{r}{\mu}\right) \quad (1)$$

In dieser Formel für die Atompotentiale $V_H(r)$ und $V_{T,F}(r)$ ist e die Elektronenladung, Z ist die Ordnungszahl des Atoms (Z_p/Z) ist die reduzierte effektive Kernladung der neutralen Atome und Φ ist die Thomas-Fermische Funktion des freien neutralen Atoms¹⁾. Die Größe μ , welche in der Formel (1) vorkommt, ist durch folgenden Ausdruck $\mu = 0,88534 a_0/Z^{1/3}$ gegeben. In dieser Formel für μ ist a_0 der kleinste Bohrsche Wasserstoffradius. Weiter wollen wir in dieser Arbeit zur Vereinfachung von der Retardierung absehen, also die quadratischen und linearen Glieder in v/c vernachlässigen, v und c bedeuten die Elektronen und Lichtgeschwindigkeit. Summiert man über die zwei senkrecht zueinander stehende Polarisationsrichtungen so ergibt sich als Gesamtintensität²⁾

$$J, dv = \frac{dv}{R^2} \frac{2\pi e^2}{h^4 c^3} \frac{p}{p_0} \int d\Omega (\vec{n} \times \vec{P}_0)^2 |V(\vec{P}_0)|^2. \quad (2)$$

¹⁾ P. Gombás, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen. Wien 1949.

²⁾ F. Sauter, Ann. Physik 18, 486 (1933).

Die Abkürzung \vec{P}_0 bedeutet den auf das feste Potentialfeld übertragenen Impuls im Falle der Vernachlässigung der Voreilung.

$$\vec{P}_0 = \vec{p}_0 - \vec{p} \quad (3)$$

Der Impuls des Elektrons im Anfangszustande ist \vec{p}_0 und im Endzustande \vec{p} . Hier ergibt sich bekanntlich für das Störungsintegral $V(\vec{P}_0)$ folgende Formel

$$V(\vec{P}_0) = \int V(r) e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_0, \vec{r})} d\tau. \quad (4)$$

In dieser Formel für $V(\vec{P}_0)$ ist $V(r)$ durch $V_H(r)$ oder $V_{T,F}(r)$ gegeben. Die verschiedenen Symbole, welche in den letzten Formeln vorkommen, haben folgende Bedeutung. R ist die Entfernung vom Streuzentrum, \vec{n} ist die Fortschreitungsrichtung des Lichtes, $d\nu$ ist der Frequenzintervall, \hbar ist die Plancksche Konstante, p_0 und p sind die Absolutbeträge des Anfangs- und Endimpulses des Kathodenstrahlelektrons. $d\Omega$ in (2) ist das Raumwinkelement im Impulsraum und $d\tau$ ist das Volumenelement. Aus mathematischen Gründen wollen wir hier für das Potential (1) den Ansatz machen

$$V_H(r) \text{ oder } V_{T,F}(r) = -\frac{e^2 Z}{r} \sum_{i=1}^3 c_i e^{-\frac{b_i r}{\mu}} = -\frac{e^2 Z}{r} \sum_{i=1}^3 c_i e^{-b_i x} \text{ mit } \frac{r}{\mu} = x. \quad (5)$$

Die Konstanten c_i und b_i für das Hartreesche $V_H(r)$ und das Thomas-Fermische Potential $V_{T,F}(r)$ sind in Tabelle 1 zu finden.

Mit diesem speziellen Ansatz (5) lautet das Störungsintegral $V(\vec{P}_0)$ Formel (4) wie folgt,

$$V(\vec{P}_0) = -\frac{Ze^2 \hbar^2}{\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{\left(p_0^2 + \frac{\hbar^2 b_i^2}{\mu^2}\right)}. \quad (6)$$

Daraus ergibt sich für die Intensität der unpolarisierten Bremsstrahlung $J, d\nu$ bei festgehaltener Ausstrahlungs-Frequenz und Richtung (ν und \vec{n}) folgende Formel. Die Integration über die Richtungen von \vec{p} läßt sich elementar ausführen.

$$J, d\nu = \frac{d\nu}{R^2} \cdot \frac{4Z^2 e^6}{c^3} \cdot \frac{p}{p_0^3} \sum_{i=1}^3 c_i^2 \left\{ \frac{p_0^2 + p^2 + \frac{\hbar^2 b_i^2}{\mu^2}}{4 p_0 p} \ln \frac{(p_0 + p)^2 + \frac{\hbar^2 b_i^2}{\mu^2}}{(p_0 - p)^2 + \frac{\hbar^2 b_i^2}{\mu^2}} - 1 + \frac{\sin^2 \theta}{2} \left[\frac{p_0^2 - 3p^2 - 3 \frac{\hbar^2 b_i^2}{2}}{4 p_0 p} \ln \frac{(p_0 + p)^2 + \frac{\hbar^2 b_i^2}{\mu^2}}{(p_0 - p)^2 + \frac{\hbar^2 b_i^2}{\mu^2}} + 3 - \frac{4 p_0^2 \frac{\hbar^2 b_i^2}{\mu^2}}{\left(p_0^2 + p^2 + \frac{\hbar^2 b_i^2}{\mu^2}\right)^2 - 4 p_0^2 p^2} \right] \right\} + \frac{d\nu}{R^2} \frac{8 e^6 Z^2 p}{c^3 p_0^3} \cdot \left\{ \frac{c_1 c_2 \mu^2}{\hbar^2 (b_2^2 - b_1^2)} \left[\begin{matrix} 1 \\ 2,1 \end{matrix} \right] + \frac{c_1 c_3 \mu^2}{\hbar^2 (b_3^2 - b_1^2)} \left[\begin{matrix} 1 \\ 3,1 \end{matrix} \right] + \frac{c_2 c_3 \mu^2}{\hbar^2 (b_3^2 - b_2^2)} \left[\begin{matrix} 1 \\ 2,1 \end{matrix} \right] \right\} \quad (7)$$

Die Klammern in der letzten Formel haben folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned}
 []_{2,1} = & \frac{4 p_0^2 p^2 - \left(p_0^2 + p^2 + \frac{\hbar^2 b_1^2}{\mu^2} \right)^2}{8 p_0 p} \ln \frac{(p_0 + p)^2 + \frac{\hbar^2 b_1^2}{\mu^2}}{(p_0 - p)^2 + \frac{\hbar^2 b_1^2}{\mu^2}} \\
 & - \frac{4 p_0^2 p^2 - \left(p_0^2 + p^2 + \frac{\hbar^2 b_2^2}{\mu^2} \right)^2}{8 p_0 p} \ln \frac{(p_0 + p)^2 + \frac{\hbar^2 b_2^2}{\mu^2}}{(p_0 - p)^2 + \frac{\hbar^2 b_2^2}{\mu^2}} \\
 & - \frac{\hbar^2 (b_2^2 - b_1^2)}{2 \mu^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{2} \left[\frac{3 \left(p_0^2 + p^2 + \frac{8 \hbar^2 b_1^2}{\mu^2} \right)^2 - 12 p_0^2 p^2 - \frac{\hbar^2 b_1^2}{\mu^2} p_0^2}{8 p_0 p} \right. \\
 & \cdot \ln \frac{(p_0 + p)^2 + \frac{\hbar^2 b_1^2}{\mu^2}}{(p_0 - p)^2 + \frac{\hbar^2 b_1^2}{\mu^2}} - \frac{3 \left(p_0^2 + p^2 + \frac{8 \hbar^2 b_2^2}{\mu^2} \right)^2 - 12 p_0^2 p^2 - \frac{\hbar^2 b_2^2}{\mu^2} p_0^2}{8 p_0 p} \\
 & \cdot \ln \frac{(p_0 + p)^2 + \frac{\hbar^2 b_2^2}{\mu^2}}{(p_0 - p)^2 + \frac{\hbar^2 b_2^2}{\mu^2}} + \left. \frac{3 \hbar^2 (b_2^2 - b_1^2)}{2 \mu^2} \right].
 \end{aligned} \quad (8)$$

Die zwei anderen Klammern $[]_{3,1}$ und $[]_{3,2}$ bekommen wir aus $[]_{2,1}$, wenn wir den Index 2 durch 3 und 1 durch 2 ersetzen. In dieser Formel ϑ ist der Winkel zwischen Primärrichtung des Elektrons und Beobachtungsrichtung des Röntgenquants. Für $\lim b_i \rightarrow 0$ mit $i = 1, 2, 3$ und $\sum_{i=1}^3 c_i = 1$ geht die Formel (7) für die Gesamtintensität in die entsprechende Formel des reinen Coulomb-Feldes über³⁾.

$$J_\nu d\nu = \frac{d\nu}{R^2} \frac{4 Z^2 e^6}{c^2} \frac{p}{p_0^2} \left[\left(\frac{p_0^2 + p^2}{2 p_0 p} \ln \frac{p_0 + p}{p_0 - p} - 1 \right) + \frac{\sin^2 \vartheta}{2} \cdot \left(\frac{p_0^2 - 3 p^2}{2 p_0 p} \ln \frac{p_0 + p}{p_0 - p} + 3 \right) \right]. \quad (9)$$

Die Beiträge der beiden Polarisationskomponenten und zur Primärstrahlung direkt aus der Formel (9) des Coulomb-Feldes oder Formel (7) des Hartreeschen Feldes für die Winkel $\vartheta = 0^\circ$ und $\vartheta = 90^\circ$. Die gesamte, in das Frequenzintervall $d\nu$ entfallende, emittierte Energie, wie eine leichte Rechnung zeigt, ist durch die Formel gegeben.

$$\begin{aligned}
 \int J_\nu d\nu R^2 d\omega = d\nu \frac{32 \pi Z^2 e^6}{3 c^3} \frac{1}{p_0^2} \sum_{i=1}^3 c_i^2 \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{(p_0 + p)^2 + \frac{\hbar^2 b_i^2}{\mu^2}}{(p_0 - p)^2 + \frac{\hbar^2 b_i^2}{\mu^2}} \right. \\
 \left. - \frac{2 p_0 p \frac{\hbar^2 b_i^2}{\mu^2}}{\left(p_0^2 + p^2 + \frac{\hbar^2 b_i^2}{\mu^2} \right)^2 - 4 p_0^2 p^2} \right\} + d\nu \frac{32 \pi e^6 Z^2 p}{c^3 p_0^3} \\
 \cdot \left\{ \frac{c_1 c_2 \mu^2}{\hbar^2 (b_2^2 - b_1^2)} \cdot K_{2,1} + \frac{c_1 c_3 \mu^2}{\hbar^2 (b_3^2 - b_1^2)} \cdot K_{3,1} + \frac{c_2 c_3 \mu^2}{\hbar^2 (b_3^2 - b_2^2)} \cdot K_{3,2} \right\}.
 \end{aligned} \quad (10)$$

³⁾ A. Sommerfeld, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **15**, 393 (1929); Ann. Physik **5**, 11, 257 (1931).

Die Symbole $K_{2,1}$, $K_{3,1}$ und $K_{3,2}$ sind durch folgende Formel gegeben.

$$\begin{aligned}
 K_{2,1} = & \frac{4 p_0^2 p^2 - \left(p_0^2 + p^2 + \frac{\hbar^2 b_1^2}{\mu^2} \right)^2}{8 p_0 p} \ln \frac{(p_0 + p)^2 + \frac{\hbar^2 b^2}{\mu^2}}{(p_0 - p)^2 + \frac{\hbar^2 b_1^2}{\mu^2}} \\
 & - \frac{4 p_0^2 p^2 - \left(p_0^2 + p^2 + \frac{\hbar^2 b_2^2}{\mu^2} \right)^2}{8 p_0 p} \ln \frac{(p_0 + p)^2 + \frac{\hbar^2 b_2^2}{\mu^2}}{(p_0 - p)^2 + \frac{\hbar^2 b_2^2}{\mu^2}} \\
 & - \frac{\hbar^2}{2 \mu^2} (b_2^2 - b_1^2) + \frac{2}{3} \left[\frac{3 \left(p_0^2 + p^2 + \frac{\hbar^2 b_1^2}{\mu^2} \right)^2 - 12 p_0^2 p^2 - \frac{8 \hbar^2 b_1^2}{\mu^2} p_0^2}{8 p_0 p} \right. \\
 & \cdot \ln \frac{(p_0 + p)^2 + \frac{\hbar^2 b_1^2}{\mu^2}}{(p_0 - p)^2 + \frac{\hbar^2 b_1^2}{\mu^2}} - \frac{3 \left(p_0^2 + p^2 + \frac{\hbar^2 b_2^2}{\mu^2} \right)^2 - 12 p_0^2 p^2 - \frac{8 \hbar^2 b_2^2}{\mu^2} p_0^2}{8 p_0 p} \\
 & \left. \cdot \ln \frac{(p_0 + p)^2 + \frac{\hbar^2 b_2^2}{\mu^2}}{(p_0 - p)^2 + \frac{\hbar^2 b_2^2}{\mu^2}} + \frac{3 \hbar^2 (b_2^2 - b_1^2)}{2 \mu^2} \right]. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Die anderen Symbole $K_{3,1}$ und $K_{3,2}$ sind aus der Formel für $K_{2,1}$ leicht zu finden. Die gesamte, beim Bremsprozeß emittierte Energie J ist wie bekannt durch die Formel gegeben.

$$J = \int_0^{v_0} dv \int J, R^2 d\omega \quad \text{mit} \quad v_g = \frac{p_0^2}{2 m \hbar} \quad (12)$$

Führt man statt v den Impuls p als Integrationsveränderliche ein $v = \frac{p^2}{2 m \hbar}$, so läßt sich die Integration elementar ausführen und ergibt zum Beispiel für (Z_p/Z) eingliedrige Exponentialfunktion folgende Formel für J :

$$\begin{aligned}
 J = & \frac{32 \pi Z^2 e^6}{3 m c^3 \hbar} \left\{ 1 + 2 \left(\frac{\hbar b}{2 \mu p_0} \right)^2 \cdot \ln \left[1 + \left(\frac{2 \mu p_0}{\hbar b} \right)^2 \right] \right. \\
 & \left. - \frac{3 \hbar b}{2 \mu p_0} \operatorname{arctg} \frac{2 \mu p_0}{\hbar b} \right\}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Die Konstante b ist in der Tabelle 1 zu finden. Die Formeln (12) und (10) erlauben uns die gesamte, beim Bremsprozeß emittierte Energie J für das Potential (1) mit dem Ansatz (5) leicht zu berechnen. Wir begnügen uns jedoch in dieser Arbeit mit dem Ausdrucke (13). Die in dieser Arbeit mit Hilfe der Bornschen Näherung abgeleiteten Formeln sind für solche Geschwindigkeiten v oder v_0 brauchbar, wenn diese groß gegen die Geschwindigkeit eines Elektrons in der Bornschen Bahn sind, also $\alpha Z < \frac{v}{c}$ und $\alpha Z < \frac{v_0}{c}$, wobei die Feinstrukturkonstante $e^2/\hbar c$ ist.

Atom

He

Be

C

N

O

F

Ne

A

K

Ca

Cr

Fe

Zn

Ge

As

Br

Kr

W

Hg

 $\Phi(x)$ $\Phi(x)$

a) Diese

f) siehe

I

Phy

könn

Tabelle 1
Analytische Näherungen für (Z_p/Z) und $\Phi(x)$.

Atom	(Z_p/Z) eingliedrig	(Z_p/Z) mehrgliedrig
He	$e^{-1,60x}$ (Byatt ^f)	$1,25 e^{-1,75x} - 0,25 e^{-2,845x}$ (Byatt ^f)
Be		$e^{-0,573x} + 0,48 e^{-1,081x} + 0,48 e^{-3,06x}$ (Byatt ^f)
C		$1,25 e^{-0,525x} - 0,44 e^{-1,41x} + 0,19 e^{-4,29x}$ (Byatt ^f)
N	$e^{-0,95x}$ (Byatt ^f)	$1,20 e^{-0,904x} - 0,32 e^{-1,43x} + 0,12 e^{-9,65x}$ (Byatt ^f)
O	$e^{-0,919x}$ (Byatt ^f)	$1,25 e^{-0,901x} - 0,35 e^{-1,63x} + 0,10 e^{-18,5x}$ (Byatt ^f)
F	$e^{-0,907x}$ (Byatt ^f)	
Ne	$e^{-0,978x}$ (Byatt ^f)	
A		$0,88 e^{-566x} - 0,24 e^{-1,056x} + 0,40 e^{-3,25x}$ a
		$0,659 e^{-0,574x} + 0,341 e^{-2,77x}$ (Ruark ^f)
K		$0,124 e^{-0,514x} + 0,68 e^{-0,765x} + 0,196 e^{-2,80x}$ (Byatt ^f)
Ca		$0,20 e^{-0,195x} + 0,56 e^{-0,770x} + 0,24 e^{-3,06x}$ (Byatt ^f)
Cr	$e^{-0,731x}$ (Byatt ^f)	$e^{-0,731x} - 0,20 e^{-1,96x} + 0,20 e^{-3,70x}$ (Byatt ^f)
Fe		$0,25 e^{-0,335x} + 0,56 e^{-0,523x} + 0,19 e^{-3,76x}$ (Byatt ^f)
Zn		$0,22 e^{-0,319x} + 0,78 e^{-1,08x}$ (Byatt ^f)
Ge		$0,22 e^{-0,263x} + 0,78 e^{-1,165x}$ (Byatt ^f)
As		$0,295 e^{-0,387x} + 0,705 e^{-1,295x}$ (Byatt ^f)
Br		$0,36 e^{-0,366x} + 0,64 e^{-1,453x}$ (Byatt ^f)
Kr		$0,335 e^{-0,295x} + 0,60 e^{-1,33x} + 0,065 e^{-7x}$ a
		$0,415 e^{-0,378x} + 0,51 e^{-1,48x} + 0,075 e^{-7x}$ (Byatt ^f)
W		$0,19 e^{-0,216x} + 0,72 e^{-0,97x} + 0,09 e^{-15x}$ (Byatt ^f)
Hg		$0,19 e^{-0,257x} + 0,56 e^{-0,779x} + 0,25 e^{-3,16x}$ (Byatt ^f)
$\Phi(x)$		$0,255 e^{-0,246x} + 0,581 e^{-0,947x} + 0,164 e^{-4,356x}$ (Rozenal ^d)
$\phi(x)$		$0,35 e^{-0,3x} + 0,55 e^{-1,2x} + 0,1 e^{-6x}$ (Moliere ^c)

a) Dieser Ausdruck enthält die Polarisationskorrektur, siehe ⁴), b) siehe ⁵), c) siehe ⁶), d) siehe ⁷), f) siehe ⁸).

Der Autor dieser Arbeit ist sehr verpflichtet, Herrn Prof. Dr. Gáspár sein Physikalisch-Theoretisches Institut der Universität Debrecen besuchen zu können.

⁴) J. Holtzmark, Z. Physik **55**, 437 (1929); **66**, 49 (1930).

⁵) A. E. Ruark, Physic. Rev. **57**, 62 (1940).

⁶) G. Moliere, Z. Naturforsch. **2a**, 133 (1947).

⁷) S. Rozenal, Z. Physik **98**, 42 (1935).

⁸) W. J. Byatt, Physic. Rev. **104**, 1298 (1956).

Łódź (Polen), Institut der Theoretischen Physik der Universität Łódź.

Bei der Redaktion eingegangen am 25. Mai 1960.

Berechnung und Messung des inneren Entmagnetisierungsfaktors¹⁾

Von G. Vogler

Mit 5 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Es wird über die Berechnung der magnetischen Energie und des pauschalen inneren Entmagnetisierungsfaktors einer in einem Volumen verteilten Vielheit kleiner, ferromagnetischer Teilchen berichtet. Für statistische Verteilung kugelförmiger, ferromagnetischer Teilchen werden die Ergebnisse der theoretischen Betrachtungen mit Messungen an Gummi-Eisen-Gemischen verglichen.

Teil I

Berechnung des inneren Entmagnetisierungsfaktors

1. Einleitung

In Abb. 1 ist die Feldverteilung für ein Ellipsoid A im äußeren Feld H_a schematisch skizziert. Das gesamte Streufeld des Ellipsoids mit dem Volumen V_a , in dem die Streufeldenergie $+\frac{1}{2} N_a J_p^2 V_a$ gespeichert ist, besteht aus zwei Teilfeldern, von denen das eine im Inneren des Ellipsoids und das andere im Außenraum verläuft. Das homogene entmagnetisierende Feld im Inneren

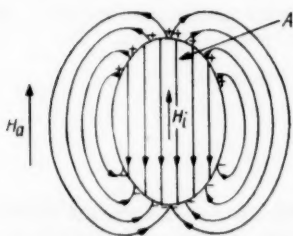


Abb. 1. Schematische Darstellung eines homogen magnetisierten Ellipsoids. H_a parallel zur Längsachse des Ellipsoids

des Ellipsoids ist dem äußeren Entmagnetisierungsfaktor N_a und der Magnetisierung J_p proportional ($-N_a J_p$). Der Energieausdruck für die magnetische Gesamtenergie eines homogen magnetisierten Ellipsoids im äußeren Feld H_a ist bekannt. Für eine Anzahl magnetischer Probleme ist von Interesse, welche Energie in einer Anordnung zahlreicher homogen magnetisierter Mikroteilchen gespeichert wird und wie groß der innere Entmagnetisierungsfaktor einer solchen Anordnung ist¹⁻⁷⁾. Um eine Übersicht über das oben angeführte Problem zu geben, soll in einem Gedankenexperiment die Ma-

¹⁾ Diese und eine weitere Abhandlung mit dem Titel „Über die Längenänderung von Ferromagnetikum-Trägerstoff-Gemischen im Magnetfeld“, die an gleicher Stelle demnächst veröffentlicht wird, sind Auszüge aus einer Promotionsarbeit.

²⁻⁷⁾ s. S. 269.

gnetisierung eines homogen magnetisierten Ellipsoids A (Abb. 1) in zahlreichen kleinen Mikroteilchen a_i konzentriert werden (Abb. 2). Dabei soll die Gestalt des Ellipsoids A erhalten bleiben, keine Magnetisierung von außerhalb des Ellipsoids zugeführt werden und die Anzahl der Mikroteilchen so groß sein, daß man sie in A statistisch verteilen kann.

Unter diesen Voraussetzungen bleiben die pauschale Magnetisierung J_p im Ellipsoid, folglich die Polverteilung auf der Oberfläche und das äußere Streufeld in größerer Entfernung ungeändert erhalten. Das Streufeld des Ellipsoids A , das vom Makrokörper stammt, soll Makrofeld genannt werden. Diesem Makrofeld ist aber noch das stark inhomogene Streufeld der Mikroteilchen — Mikrofeld genannt — überlagert (Abb. 2). In beiden Feldern ist eine Energie gespeichert (Energie des Makrofeldes oder äußere Streufeldenergie, Energie des Mikrofeldes oder innere Streufeldenergie). Es liegt nun nahe, entsprechend der Beziehung für die Energie des Makrofeldes ($E_a = +\frac{1}{2} N_a J_p^2 V_G$), für die Energie des Mikrofeldes den Ausdruck ($E_i = +\frac{1}{2} N_i J^2 V_T$) einzuführen. In dieser Beziehung ist $J(J \cdot v = J_p, v \equiv$ relatives Mikroteilchenvolumen) die mittlere Magnetisierung in den Mikroteilchen, N_i der innere Entmagnetisierungsfaktor, V_G das Gesamtvolumen des Körpers und V_T das Gesamtvolumen der Mikroteilchen.

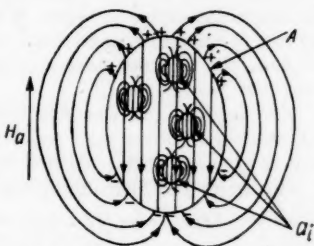


Abb. 2. Schematische Darstellung stark vergrößerter, statistisch verteilter, homogen magnetisierter Mikroteilchen a_i in einer unmagnetischen Substanz eingebettet. Der Gesamtkörper A hat die Form eines Ellipsoids

2. Berechnung der magnetischen Energie beliebig angeordneter, homogen magnetisierter, gleicher Rotationsellipsoide, deren große Achsen und Magnetisierungsvektoren parallel zueinander liegen

Es soll zuerst eine allgemeine Beziehung für die Energie beliebig angeordneter, homogen magnetisierter, ausgerichteter, ellipsoidförmiger Mikroteilchen gleicher Magnetisierung abgeleitet und dann die innere Streufeldenergie und der innere Entmagnetisierungsfaktor für kugelförmige Mikroteilchen in statistischer Verteilung, in einem kubischen und zwei tetragonalen Gitteranordnungen berechnet werden. Dabei soll die Gesamtzahl der Mikroteilchen genügend groß sein.

Der Ausdruck für die Gesamtenergie eines homogen magnetisierten Ellipsoids im äußeren Feld $H_a(H_a \parallel J_p)$ lautet:

$$E = -H_a J_p V_G + \frac{1}{2} N_a J_p^2 V_G.$$

²⁾ L. Neel, Appl. sci. Res. B, 4, 13 (1954).

³⁾ L. Neel, C. R. 224, 1550 (1947).

⁴⁾ E. P. Wohlfahrt, Philos. Mag. Suppl. 8, 87 (1959).

⁵⁾ C. Kittel, Rev. mod. Physics 21, 541 (1949).

⁶⁾ G. Vogler, Naturwissenschaften 13, 423 (1959).

⁷⁾ G. Vogler, Diss. Jena, 1958.

Es soll nun die Energie berechnet werden, die man aufwenden muß, um sämtliche zunächst im Gesamtvolumen V_G des Makrokörpers homogen verteilte Magnetisierung in den Mikroteilchen zu konzentrieren. Dabei sollen die Mikroteilchen in Gittern oder statistisch verteilt, aber ausgerichtet angeordnet und die Magnetisierung in allen Mikroteilchen gleich groß und homogen sein. Bei der Betrachtung geht man von einem allgemeinen Zwischenzustand aus, bei dem ein Teil der gesamten Magnetisierung bereits in die Mikroteilchen überführt worden ist.

Man beginnt mit der schrittweisen Erhöhung der Magnetisierung in den Mikroteilchen, indem man pro Volumenelement $d\tau$ an jedem Ort des Gesamtkörpers A einen differentiellen Anteil dJ' der Magnetisierung aus dem Feld H_i entnimmt und gleichmäßig über die Mikroteilchen a_i verteilt, in denen im Mittel die Feldstärke \bar{H}_2 herrscht. Dabei muß man die Energie

$$\begin{aligned} dE_i &= -\bar{H}_2 V_G dJ' + \int \vec{H}_i d\vec{J}' d\tau & (H_x || dJ') \\ &= -\bar{H}_2 V_G dJ' + dJ' \int H_x d\tau & (\bar{H}_2 || dJ') \end{aligned}$$

aufbringen.

Für das Raumintegral $\int_R H_x d\tau$ über die Komponente H_x des Feldes einer Punktladung gilt ganz allgemein, daß es verschwindet, wenn es sich über das ganze Volumen erstreckt. Also verschwindet $\int_R H_x d\tau$ auch für alle Felder, die aus beliebig vielen Punktladungen aufgebaut sind, insbesondere für die Felder der Abb. 1 und der Abb. 2. Da sich in diesen beiden Feldbildern die Felder im Raum außerhalb des Ellipsoides A nicht unterscheiden, genügende Kleinheit und Gleichheit der Verteilung der Mikroteilchen a_i vorausgesetzt, ist also das über den Außenraum erstreckte $\int H_x d\tau$ in beiden Feldern das gleiche. Dann hat aber auch $\int_A H_x d\tau$, über das Volumen A erstreckt, im Falle Abb. 2 den gleichen Wert wie in Abb. 1, nämlich $(H_a - N_a J_p) V_G$. Man erhält also für die Energie:

$$dE_i = -\bar{H}_2 V_G dJ' + (H_a - N_a J_p) V_G dJ' = \Delta \bar{H} V_G dJ'.$$

Wenn man pro Volumenelement aus dem Gesamtkörper die Magnetisierung dJ' entnimmt, dann stammt nur der Anteil $(1-v) dJ'$ aus der Umgebung der Mikroteilchen, so daß die Magnetisierung in den Mikroteilchen pro Schritt um $dJ_1 = \frac{(1-v)}{v} dJ'$ erhöht wird. Daraus folgt für den Energieaufwand pro Schritt:

$$dE_i = \frac{v \cdot V_G}{(1-v)} \Delta \bar{H} dJ_1.$$

Zur Berechnung des Feldes \bar{H}_2 in einem beliebigen Mikroteilchen unterteilt man den Gesamtkörper durch einen Ellipsoid mit dem Entmagnetisierungsfaktor N_e in zwei Gebiete (Abb. 3). Die außerhalb des Ellipsoides liegenden Mikroteilchen sind vom Aufteilchen so weit entfernt, daß man sie hinsichtlich ihrer Feldwirkung auf das Aufteilchen als „verschmiert“ ansehen darf. Durch Integration vom Ellipsoid N_e bis zu den Körpergrenzen erhält man das pauschale Feld der verschmiert gedachten Mikroteilchen (Magnetisierung J_p) am Ort des Aufteilchens. Innerhalb des N_e -Ellipsoides befinden sich Mikroteilchen

der Magnetisierung J_1 , die in der Magnetisierung J_{p0} eingebettet sind. Das Feld \bar{H}_2 im Aufteilchen entsteht somit durch Addition von 5 Anteilen:

$$\bar{H}_2 = H_a - N_a J_p + N_e (J_p - J_{p0}) - N_T (J_1 - J_{p0}) + v \cdot N_G (J_1 - J_{p0}).$$

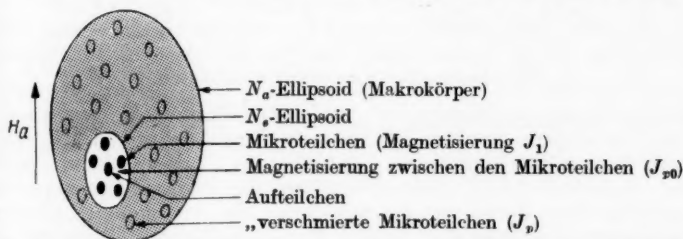


Abb. 3. Schematische Darstellung eines Ellipsoids mit statistisch verteilten Mikroteilchen und einem Aufteilchen (Erklärung im Text).

N_T ist der Entmagnetisierungsfaktor eines Einzelteilchens, N_G eine Konstante, die von der Anordnung der Teilchen (z. B. statistische Verteilung) und von der Form des N_e -Ellipsoids abhängt. Aus den obigen Betrachtungen erhält man für die mittlere Felddifferenz

$$\Delta \bar{H} = -N_e (J_p - J_{p0}) + N_T (J_1 - J_{p0}) - v \cdot N_G (J_1 - J_{p0})$$

und für die Energie

$$E_i = \frac{v \cdot V_a}{(1-v)} \int_{J_p}^J \Delta \bar{H} dJ_1 \quad J_{p0} = \frac{J_p - J_1 \cdot v}{(1-v)}$$

$$E_i = \frac{v \cdot V_a}{(1-v)^2}$$

$$\left\{ + N_e J_p \cdot v \cdot J_1 - \frac{N_e}{2} J_1^2 v + \frac{N_T}{2} J_1^2 - N_T J_p J_1 - \frac{N_G}{2} J_1^2 v + v N_G \cdot J_p \cdot J_1 \right\}_{J_p}^J.$$

Mit $J_p = J \cdot v$ wird der Ausdruck umgeformt:

$$E_i = + \frac{1}{2} J^2 N_T \left(1 - \frac{N_e + N_G}{N_T} \cdot v \right) V_a \cdot v. \quad (1)$$

Da der Ausdruck für die innere Streufeldenergie nur von der Teilchenform und Verteilung, aber nicht von der Gestalt des N_e -Ellipsoids abhängt, ist ($N_e + N_G$) eine für die Form und Verteilung der Mikroteilchen charakteristische Konstante, die Verteilungskonstante G genannt werden soll.

$$E_i = + \frac{1}{2} J^2 \cdot N_T \left[1 - \frac{G}{N_T} \cdot v \right] V_a \cdot v. \quad (2)$$

In Analogie zur Energie des entmagnetisierenden Feldes eines homogen magnetisierten Körpers $E_a = + \frac{1}{2} N_a J_p^2 V_a$ schreibt man den Ausdruck für die

innere Streufeldenergie $E_i = + \frac{1}{2} N_i J^2 V_a \cdot v$ und nennt

$$N_i = N_T \left[1 - \frac{G}{N_T} \cdot v \right]$$

den inneren Entmagnetisierungsfaktor der Mikroteilchenanordnung. Die Gesamtenergie der Teilchenanordnung setzt sich somit aus drei Energieanteilen zusammen.

$$E = -H_a J_p V_G + \frac{1}{2} N_a J_p^2 V_G + \frac{1}{2} J^2 N_T \left[1 - \frac{G}{N_T} \cdot v \right] V_G \cdot v. \quad (3)$$

3. Berechnung der Verteilungskonstanten G

Bei der allgemeinen Ableitung des Ausdruckes der inneren Streufeldenergie war der Gesamtkörper durch ein Ellipsoid des Entmagnetisierungsfaktors N_e , in dessen Zentrum das betrachtete Aufteilchen lag, in zwei Gebiete unterteilt worden. Außerhalb des N_e -Ellipsoides sollten die Mikroteilchen hinsichtlich ihres resultierenden Feldes auf das Aufteilchen als „verschmiert“ betrachtet werden (Kontinuum). Innerhalb des N_e -Ellipsoides mußte über die Wechselwirkungsfelder sämtlicher Nachbarpartikeln summiert werden. Durch diese Summation erhält man die Konstante N_G , die mit dem Entmagnetisierungsfaktor N_e des N_e -Ellipsoides die Verteilungskonstante G ergibt.

Es soll die Verteilungskonstante G für vier verschiedene Anordnungen kugelförmiger Mikroteilchen — kubisches Gitter ($\beta = 1$), tetragonales Gitter, bei dem der Teilchenabstand in Magnetisierungsrichtung halb so groß ist wie senkrecht dazu ($\beta = 2$), tetragonales Gitter, bei dem der Teilchenabstand in Magnetisierungsrichtung doppelt so groß ist wie senkrecht dazu ($\beta = 0,5$) und statistisch verteilte Teilchen — berechnet werden. Auf die Wiedergabe des numerischen Teiles der Rechnung wird dabei verzichtet und nur der Weg und das Endergebnis angegeben. Außerdem soll ein spezielles N_e -Ellipsoid, nämlich die Kugel ($N_e = 4\pi/3$), das Kontinuum von den Nachbarpartikeln trennen. Bei der Summation über die Wechselwirkungsfelder der benachbarten Mikroteilchen werden jeweils die auf einer Kugelschale liegenden Mikroteilchen zusammengefaßt. Um das hier beschriebene Auswerteverfahren anwenden zu können, muß man von einer größeren Anzahl Mikroteilchen die Lageindizes n , m und l anschreiben. Dabei soll das Aufteilchen, dessen Wechselwirkung mit den benachbarten Mikroteilchen berechnet wird, im Koordinatenursprung liegen ($n = m = l = 0$).

Da den Betrachtungen kugelförmige, homogen magnetisierte Mikroteilchen zugrunde gelegt wurden, besitzt jedes Teilchen ein Dipolfeld. Aus Symmetriebetrachtungen entnimmt man, daß, da die Dipole parallel ausgerichtet sind, sowohl bei den statistisch verteilten Mikroteilchen als auch bei den hier behandelten kubischen und tetragonalen Gittern die Summe der H_y - und die Summe der H_z -Komponenten am Ort des Aufteilchens zu Null werden. Man braucht deshalb für den weiteren Verlauf der Rechnung nur die H_x -Komponente (x -Richtung \equiv Magnetisierungsrichtung) zu berücksichtigen.

$$H_x = + \kappa \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{[x^2 + y^2 + z^2]^{5/2}} \quad (\kappa \equiv \text{Magnetisches Moment eines Teilchens})$$

Mit den Lageindizes n , m und l sowie den Konstanten u (Gitterkonstante) und β erhält man für das gesamte auf das Aufteilchen ($n = m = l = 0$) wir-

kende Wechselwirkungsfeld:

$$H_{ww} = + \frac{\kappa}{u^3} \sum_{n=0}^l \sum_{m=0}^g \sum_{l=0}^h \frac{2 n^2 - \beta^2(m^2 + l^2)}{[n^2 + \beta^2(m^2 + l^2)]^{5/2}} \quad \begin{aligned} x &= n \cdot u \\ y &= m \cdot \beta \cdot u \\ z &= l \cdot \beta \cdot u \\ (n^2 + m^2 + l^2 &\neq 0) \end{aligned}$$

Dabei hängen die Größen f , g und h von der Gestalt und Größe des N_e -Ellipsoids (Summationsgrenzen auf den 3 Achsen f_0 , g_0 , h_0) ab und erfüllen die Bedingung $\frac{f^2}{f_0^2} + \frac{g^2}{g_0^2} + \frac{h^2}{h_0^2} = 1$. Der Ausdruck für das Wechselwirkungsfeld H_{ww} wird umgeformt und als Wert der dreifachen Summe der Buchstabe K eingeführt.

$$H_{ww} = + \frac{\kappa}{u^3} \cdot K = \frac{J \cdot v_T}{u^3} \cdot K.$$

Das relative Teilchenvolumen v ist mit dem Mikroteilchenvolumen v_T und der Gitterkonstanten u durch $v = \frac{v_T}{\beta^2 u^3}$ verknüpft. Folglich lautet der Ausdruck für das Wechselwirkungsfeld:

$$H_{ww} = \frac{J \cdot v_T}{u^3} \cdot K = K \cdot \beta^2 \cdot v \cdot J = N_G \cdot v J. \quad (4)$$

Damit ist die Verbindung zwischen dem Wechselwirkungsfeld H_{ww} und der bei der theoretischen Ableitung eingeführten Konstanten N_G hergestellt und der Weg zu ihrer Berechnung angegeben.

3.1 Kubisches Gitter ($\beta = 1$)

Man betrachtet ein beliebiges Mikroteilchen und umgibt es mit einer konzentrischen Kugelschalenschar der Radien $\Delta_i^2 = n^2 + m^2 + l^2$, wobei i der Index der Schalen ist. Jedes der zahlreichen Nachbarteilchen liegt auf einer dieser Kugelschalen und liefert einen Wechselwirkungsfeldbeitrag, der proportional $\frac{2 n^2 - m^2 - l^2}{\Delta_i^5}$ ist.

Da die Lageindizes n , m und l der auf einer Kugelschale liegenden Mikroteilchen nacheinander die gleichen Werte annehmen, wird die Summe der Wechselwirkungsbeiträge Null. Somit erhält man für die Konstante N_G ebenfalls den Wert Null und für $G = N_e + N_G = \frac{4\pi}{3}$. Der Ausdruck für die innere Streufeldenergie in einem kubischen Gitter angeordneter kugelförmiger Mikroteilchen lautet:

$$E_i = + \frac{1}{2} J^2 V_G \cdot v \cdot N_T (1 - v).$$

3.2 Tetragonales Gitter

Es werden nun die Verteilungskonstanten für die beiden tetragonalen Gittertypen ($\beta = 2$, $\beta = 0.5$) berechnet. Ebenso wie beim kubischen Gitter betrachtet man ein beliebiges Mikroteilchen und umgibt es mit einem speziellen N_e -Ellipsoid ($N_e = 4\pi/3$). Da das Dipolfeld mit $1/r^3$ abnimmt, ist es verständlich, daß dem Aufteilen unmittelbar benachbarte Mikroteilchen die Größe und das Vorzeichen des Wechselwirkungsfeldes bestimmen. So wird man

für $\beta = 2$ ein positives und für $\beta = 0,5$ ein negatives Wechselwirkungsfeld erwarten.

Durch Summation über die Wechselwirkungsfelder von etwa 500 Mikroteilchen erhält man für die Verteilungskonstanten der beiden tetragonalen Gitter:

$$G = \frac{4\pi}{3} + 15,22 = +19,41 \quad G = \frac{4\pi}{3} - 9,85 = -5,66.$$

Mit $N_T = \frac{4\pi}{3}$ lautet der Ausdruck für die Streufeldenergie (Formel 2):

$$E_i = +\frac{1}{2} J^2 V_G \cdot v \cdot N_T (1 - 4,63 v) \quad E_i = +\frac{1}{2} J^2 V_G \cdot v N_T (1 + 1,35 v)$$

3.3 Statistische Verteilung

Bei den in Gittern angeordneten Teilchen hatte das Wechselwirkungsfeld am Ort eines jeden Aufteilchens die gleiche Größe und Richtung, ganz unabhängig davon, welches Teilchen als Aufteilchen herausgegriffen wurde. Das Wechselwirkungsfeld statistisch verteilter Mikroteilchen dagegen hat für jedes Aufteilchen eine andere Größe und Richtung. Wenn man aber über die Wechselwirkungsfelder einer genügend großen Anzahl Aufteilchen summiert, dann ergibt sich für das mittlere Wechselwirkungsfeld H_{uw} der Wert Null. Damit wird auch $N_G = 0$ und $G = N_G + N_G = 4\pi/3$ und man erhält für die mittlere Streufeldenergie statistisch verteilter kugelförmiger Mikroteilchen die Beziehung:

$$E_i = +\frac{1}{2} J^2 V_G v N_T (1 - v)$$

und für den pauschalen inneren Entmagnetisierungsfaktor

$$N_i = N_T (1 - v).$$

Teil II

Diskussion der Berechnungsvernachlässigungen und Messung des inneren Entmagnetisierungsfaktors

4. Diskussion der Vernachlässigungen bei der Ableitung der inneren Streufeldenergie

4.1 Einfluß der Randteilchen

Bei der Ableitung des Ausdruckes für die innere Streufeldenergie wurde nicht berücksichtigt, daß eine Anzahl Mikroteilchen (Randteilchen) an der Oberfläche oder in unmittelbarer Nähe der Oberfläche des Gesamtkörpers angeordnet ist. Das Wechselwirkungsfeld und die Energie eines solchen Randteilchens sind von seiner Lage auf der Oberfläche des Körpers abhängig, da Nachbarteilchen entweder in Magnetisierungsrichtung oder senkrecht dazu fehlen. Wenn man beispielsweise annimmt, daß der Körper die Gestalt eines gestreckten Rotationsellipsoides hat, das in Richtung der großen Achsen magnetisiert wird, so ist die Energie der Mikroteilchen an den Enden des

Rotationsellipsoides größer als bei den Teilchen der Körpermitte oder den Randteilchen am größten Umfang des Ellipsoides.

Betrachtet man nur die Randteilchen und läßt unberücksichtigt, daß die Energie eines Mikroteilchens in der Körpermitte bei einer Verlängerung zunimmt, dann ist eine Verlängerung des Ellipsoides und damit eine Vergrößerung der Oberfläche energetisch günstig. Man kann deshalb von einer „negativen Oberflächenspannung“ in Mischkörpern aus magnetischen Teilchen in einer unmagnetischen Trägersubstanz sprechen.

Es läßt sich zeigen, daß der Anteil der Randteilchen an der Energie gegenüber dem Anteil sämtlicher anderer Mikroteilchen vernachlässigt werden darf, wenn man von extrem dünnen Körpern absieht. Der Fehler, den man macht, wenn man die Randteilchen wie Mikroteilchen in der Körpermitte behandelt, wird noch dadurch kleiner, daß die Randteilchen sowohl größere als auch kleinere Energie als die Mikroteilchen in der Körpermitte besitzen. Dadurch nimmt die Differenz zwischen der mittleren Energie der Randteilchen und der Energie der Mikroteilchen in der Körpermitte noch weiter ab.

4.2 Abschätzung des zulässigen mittleren Teilchenabstandes

Die zweite Vernachlässigung besteht darin, daß das Wechselwirkungsfeld innerhalb eines Mikroteilchens als homogen angenommen wurde. Diese Vernachlässigung wird im allgemeinen nur bis zu einem bestimmten mittleren Mikroteilchenabstand zulässig sein. Es soll deshalb mittels zweier Modellvorstellungen abgeschätzt werden, bis zu welchem relativen Mikroteilchenvolumen (kugelförmige Mikroteilchen, Radius R) in erster Näherung mit einem homogenen Wechselwirkungsfeld gerechnet werden darf.

Bei der einen Modellvorstellung wird das magnetische Moment der Mikroteilchen, ebenso wie bei der Ableitung der Beziehung für die innere Streufeldenergie, als konstant vorausgesetzt. Dagegen sollen die Mikroteilchen der zweiten Modellvorstellung eine unendlich große Permeabilität ($-NJ = H_G$) und ein vom Gesamtfeld H_G (äußeres Feld + Wechselwirkungsfeld) abhängiges magnetisches Moment — also keine homogene Magnetisierung — besitzen.

Für beide Modellvorstellungen wird die Energie $E_w = \int_{\infty}^r K(r) dr$ ($K(r) \equiv$ Wechselwirkungskraft) berechnet, die man benötigt, um zwei Mikroteilchen bis zum Abstand r einander zu nähern, wobei ihre Verbindungslinie senkrecht zu ihrer Magnetisierungsrichtung liegen soll.

Die Beziehung für die Wechselwirkungsenergie und die Gesamtenergie von zwei Teilchen mit konstantem magnetischen Moment läßt sich geschlossen darstellen, und ihre Berechnung braucht hier nicht weiter ausgeführt zu werden. Dagegen soll der Berechnungsweg für inhomogen magnetisierte Teilchen umrissen werden.

Den Feldlinienverlauf zwischen einer Punktladung und einer leitenden Ebene oder Kugel kann man mit Hilfe von Spiegelladungen berechnen. Dabei muß die Größe und Lage der Spiegelladung so gewählt werden, daß die Ebene oder Kugeloberfläche eine Fläche konstanten Potentials darstellt. Bei Spiegelung eines Dipols an einer Kugel erhält man für den Abstand ε des Spiegel-

dipols vom Kugelmittelpunkt und das Moment κ_2 des Spiegeldipols die Beziehungen

$$\varepsilon = \frac{R^2}{r} \quad \kappa_2 = -\kappa_1 \left(\frac{R}{r} \right)^3 \quad \begin{array}{l} R \equiv \text{Kugelradius} \\ r \equiv \text{Abstand des Dipols vom Kugelmittelpunkt.} \end{array}$$

Wenn man die idealisierende Voraussetzung einer unendlich großen Permeabilität macht, dann können die Betrachtungen und Beziehungen aus der Elektrostatik auch auf eine magnetisierbare Kugel und einen magnetischen Dipol übertragen werden.

In einem äußeren Feld befinden sich zwei homogen magnetisierte, kugelförmige Mikroteilchen mit einem magnetischen Moment κ_1 , die unendlich weit voneinander entfernt sind. Der Innenraum der Mikroteilchen ist feldfrei ($\mu = \infty$). Die Teilchen werden nun einander genähert und beeinflussen sich gegenseitig durch ihr Dipolfeld. Die Verformung des Dipolfeldes durch die gegenseitige Wechselwirkung wird erfaßt, indem man Spiegeldipole einführt, die symmetrisch sowohl in dem einen als auch in dem anderen Mikroteilchen auftreten, da jeder Spiegeldipol (n) des einen Teilchens wieder einen Spiegeldipol ($n+1$) im anderen Teilchen erzeugt. Die Größe der Spiegeldipole nimmt mit wachsendem n rasch ab, und sie liegen parallel oder antiparallel zum äußeren Feld. Die Beziehungen für den Abstand ε der Dipole vom Teilchenmittelpunkt und für das magnetische Moment der Spiegeldipole lauten jetzt ganz allgemein:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{R^2}{r - \varepsilon_n} \quad \kappa_{n+1} = -\kappa_n \left[\frac{R}{r - \varepsilon_n} \right]^3.$$

Dabei ist n der Index eines Spiegeldipols, κ_n sein Dipolmoment und ε_n sein Abstand vom Mittelpunkt des dazugehörigen Mikroteilchens. Mit κ_1 werden die beiden bereits bei unendlich großem Abstand vorhandenen Dipole bezeichnet, die im Teilchenmittelpunkt liegen. ε_1 ist somit gleich Null. Das Integral

$E_w = \int_{-\infty}^r K(r) dr$ läßt sich nicht wie bei den Mikroteilchen mit konstantem magnetischen Moment geschlossen darstellen, sondern muß numerisch gelöst werden.

Aus den Kurven der Gesamtenergie beider Mikroteilchen in Abhängigkeit vom Teilchenabstand für die beiden Modellvorstellungen entnimmt man, daß sich für große Mikroteilchenabstände die Kurven kaum unterscheiden und erst bei kleinen Abständen aufspalten. Bei einem mittleren Teilchenabstand von $r_m \approx 2,2 R$ beträgt die relative Energiedifferenz 2%. Mittels einer Abstandsstatistik, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, erhält man für diesen mittleren Abstand ein relatives Mikroteilchenvolumen von $v \approx 0,35$.

Zusammenfassend kann man sagen, daß der für die innere Streufeldenergie abgeleitete Ausdruck in erster Näherung bis zu einem relativen Mikroteilchenvolumen von $v = 0,35$ gilt, unter den nach dem bisher Gesagten selbstverständlichen Voraussetzungen, daß der Gesamtkörper nicht extrem dünn ist und daß die Mikroteilchen wesentlich kleiner sind als der Gesamtkörper, so daß man sie in ihm statistisch verteilen kann.

4.3 Der innere Entmagnetisierungsfaktor bei schwachen äußeren Feldern

Wenn in einem sehr starken äußeren Feld H_a , das wesentlich stärker als das Wechselwirkungsfeld der Mikroteilchen ist, zahlreiche Mikroteilchen statistisch verteilt werden, dann wird die Richtung der Magnetisierung in diesen Teilchen durch das äußere Feld H_a bestimmt und man erhält für die Teilchenansammlung eine bestimmte Gesamtenergie und den theoretischen Wert des inneren Entmagnetisierungsfaktors $N_i = N_T (1 - v)$. Mit abnehmendem äußeren Feld H_a werden die Spins unter dem Einfluß des Wechselwirkungsfeldes aus der H_a -Richtung herausgedreht. Daher stellen sie sich für jedes Feld H_a so ein, daß die Gesamtenergie ein Minimum wird. Da beim Herausdrehen der Spins aus der Richtung des Feldes H_a Energie aufgebracht werden muß, andererseits die Gesamtenergie aber abnimmt, ist somit die Drehung der Spins mit einer Abnahme der inneren Streufeldenergie und damit des inneren Entmagnetisierungsfaktors verbunden. Es ist deshalb zu erwarten, daß der experimentell bestimmte Entmagnetisierungsfaktor vom äußeren Feld H_a abhängt und nur in Feldern, die wesentlich größer als das Wechselwirkungsfeld der Teilchen sind, der theoretische Wert des inneren Entmagnetisierungsfaktors erreicht wird, wenn das relative Mikroteilchenvolumen 35% nicht überschreitet.

5. Experimentelle Bestimmung des inneren Entmagnetisierungsfaktors

Der innere Entmagnetisierungsfaktor war unter anderem für homogen magnetisierte, statistisch verteilte Kugeln abgeleitet worden und es hatte sich gezeigt, daß er nach der Beziehung $N_i = N_T (1 - v)$ linear vom relativen Ferromagnetikum-Gehalt v abhängt und von der Magnetisierung unabhängig ist. Die bei den beschriebenen Experimenten verwendeten Mikroteilchen (Carbonyleisen-Pulver) sind nur in der Sättigung ($H_a \gg H_{sw}$) homogen magnetisiert. Unterhalb der Sättigung ist ihre Magnetisierung in Größe und Richtung von der Lage der Weißschen Bezirke in den Mikroteilchen abhängig und der innere Entmagnetisierungsfaktor muß deshalb aus Messungen ermittelt werden.

Die Form der Hystereseschleife eines Ferromagnetikums ist von der Gestalt der Meßprobe abhängig. Bei Meßproben, die nicht die Gestalt eines Ringes oder eines unendlich langen Zylinders haben, erhält man eine gescherte Hystereseschleife, deren Neigung von der Größe des äußeren Entmagnetisierungsfaktors abhängt. Die gleiche Erscheinung tritt bei den Kommutierungskurven der Trägerstoff-Ferromagnetikum-Gemische durch den inneren Entmagnetisierungsfaktor auf. Die Neigung der Kommutierungskurven hängt vom relativen Ferromagnetikumgehalt der Meßprobe ab. Es ist daher möglich, aus der Scherung der Kommutierungskurve der mittleren Magnetisierung $J (J_p = J \cdot v)$ der Einzelteilchen den inneren Entmagnetisierungsfaktor zu bestimmen.

Um die Kommutierungskurve für kompaktes Carbonyleisen zu erhalten, wurden aus Carbonyleisen-Pulver zwei Proben bei 6 und 10 t/cm² gepreßt, die Kurven der pauschalen Magnetisierung aufgenommen und aus Dichtemessungen die Packungsfaktoren zu 0,7 und 0,89 ermittelt. Mittels dieser beiden Proben wurde auf den Packungsfaktor 1 linear extrapoliert und so die Magnetisierungskurve des kompakten Carbonyleisens angenähert. Da sich die Koerzitivkräfte des gepreßten und des ungepreßten Carbonyleisen-Pulvers

nur sehr wenig unterschieden ($\Delta H_c/H_c < 5\%$), ist anzunehmen, daß die Kommutierungskurven der zur Extrapolation benutzten Proben nicht durch innere Spannungen verändert wurden. Die Magnetisierungskurven $J = f(H_a)$ der Gummi-Eisen-Gemische und der Carbyloleisenproben ($v = 0,7; 0,89$) in Abb. 4 sind aus den Kurven der pauschalen Magnetisierung ($J_p = F(H_a)$) errechnet worden. Aus der Scherung der $J = f(H_a)$ -Kurven wird der innere Entmagnetisierungsfaktor in Abhängigkeit vom äußeren Feld H_a ($N_a \approx 0$) und vom relativen Mikroteilchenvolumen v bestimmt.

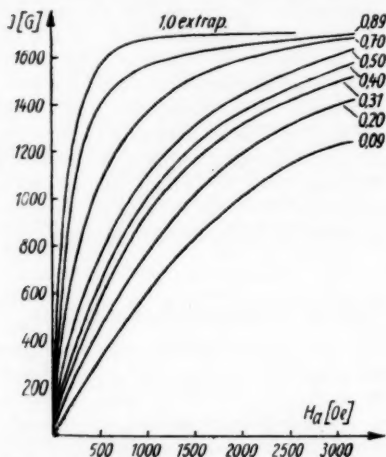


Abb. 4. Kommutierungskurven der Proben (Carbyloleisen-Pulver in Gummi und Carbyloleisen gepreßt) mit den relativen Eisengehalten von $v = 0,09; 0,20; 0,31; 0,40; 0,50; 0,70; 0,89$. Durch Extrapolation ermittelte Werte ergaben die Kurve für $v = 1,0$.

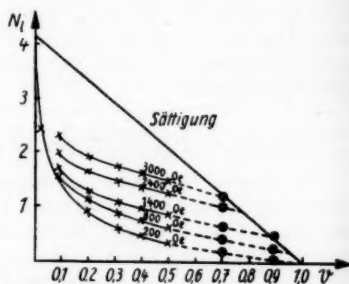


Abb. 5. Innerer Entmagnetisierungsfaktor als Funktion des relativen Eisengehaltes. Parameter ist die Feldstärke H_a ($N_a \approx 0$) (Carbyloleisen in Gummi, gepreßtes Carbyloleisen).

In Abb. 5 ist der innere Entmagnetisierungsfaktor N_i über dem relativen Eisengehalt aufgetragen. Die mit einem Kreis versehenen Kreuze stellen die zu den Kurven gehörigen Werte des gepreßten Carbyloleisens dar. Die Gerade zeigt den theoretischen Verlauf des inneren Entmagnetisierungsfaktors für homogen magnetisierte statistisch verteilte Kugeln $N_i = \frac{4\pi}{3} (1 - v)$. Mit wachsender Feldstärke nähern sich die Kurven für N_i der Sättigungsgeraden. Die hochprozentigen Proben erreichen die Sättigung und damit die Gerade eher als die mit geringem Eisengehalt. Daher ist es auch verständlich, daß die Proben mit $v = 0,7$ und $0,89$ für 3000 Oe bzw. für 3000 Oe und 1400 Oe bereits auf der theoretischen Geraden liegen, während die anderen Proben noch recht weit von ihr entfernt sind.

Abschließend muß noch betont werden, daß man die gute Übereinstimmung der experimentellen und theoretischen N_i -Werte in der Sättigung für $v = 0,7$ und $v = 0,89$ nicht als exakte Bestätigung der Theorie betrachten darf. Es

gibt in den gepreßten Proben sicher eine große Anzahl Teilchen, die durch Deformation beim Preßvorgang ihre Kugelgestalt verloren haben. Besonders die Probe mit $v = 0,89$ kann nicht nur aus kugelförmigen Teilchen bestehen, da bekanntlich die dichteste Kugelpackung bei $v = 0,74$ liegt. Da die deformierten Teilchen nicht mehr den Entmagnetisierungsfaktor der Kugel besitzen, muß auch ihr innerer Entmagnetisierungsfaktor von dem der Kugel abweichen.

Eine exakte Bestätigung der Theorie ist nur möglich, wenn es gelingt, die Kommutierungskurve der Proben mit $v \leq 0,4$ bis zur Sättigung aufzunehmen. Dazu ist aber ein ballistischer Meßplatz nötig, mit dessen Feldspule man Felder von 5000 bis 10000 Oe erzeugen kann.

Herrn Prof. Dr. Max Steenbeck möchte ich für die tatkräftige Unterstützung bei der Durchführung der Theorie und für seine grundlegenden Anregungen ganz besonders danken.

Herrn Dr. W. Andrä bin ich für zahlreiche anregende Diskussionen und die kritische Durchsicht des Manuskriptes zu Dank verpflichtet.

Jena, Institut für magnetische Werkstoffe der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bei der Redaktion eingegangen am 17. Juni 1960.

Über die magnetische Bezirksstruktur dünner Eisen-„Einkristall“-Schichten

Von D. Unangst¹⁾

Mit 30 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Es wird die magnetische Bezirksstruktur von dünnen Eisen-„Einkristall“-Schichten, deren Dicke etwa zwischen 500 Å und 10000 Å liegt, mit der Bitterstreifen-Technik untersucht. Dabei werden Beobachtungen an Schichten während des Ummagnetisierungsvorganges und an entmagnetisierten Schichten angestellt. Anschließend wird versucht, die Beobachtungsergebnisse theoretisch zu deuten.

Einleitung und experimentelle Grundlagen

Die Erforschung der ferromagnetischen Eigenschaften dünner Schichten gewinnt in der letzten Zeit immer mehr an Umfang und Bedeutung. Dieses Interesse ist einmal auf die vom kompakten Material zum Teil völlig abweichenden magnetischen Eigenschaften der dünnen Schichten (Koerzitivkraft, Sättigungsmagnetisierung usw.) zurückzuführen, zum anderen erhofft man sich einen einfacheren Zugang zur theoretischen Behandlung verschiedener Probleme.

Betrachtet man die magnetische Bezirksstruktur beim kompakten Material, so ist diese nur an der Probenoberfläche für Beobachtungen direkt zugänglich. Die unbekannte Struktur im Innern der Probe erschwert eine Deutung der Muster und macht meistens eine eingehende theoretische Behandlung unmöglich. Bei einer hinreichend dünnen Probe kann man im Innern die gleiche Struktur wie auf der Oberfläche annehmen. Außerdem kann sich die Schichtdickenabhängigkeit verschiedener magnetischer Größen ebenfalls auf die Bezirksstruktur auswirken, so daß aus einer Deutung der Muster weitere Erkenntnisse z. B. über die Koerzitivkraft, Kristallanisotropie, spezifische Wandenergie bei dünnen Schichten zu erwarten sind. Arbeiten über die magnetische Bezirksstruktur von dünnen Schichten sind bisher von verschiedenen Autoren veröffentlicht worden²⁻¹⁰⁾. Meistens wurden Eisen-Nickel-Legierungen

¹⁾ Aus der Dissertation des Verfassers, Jena 1959.

²⁾ C. A. Fowler, E. M. Fryer u. J. R. Stevens, Phys. Rev. **104**, 645 (1956).

³⁾ C. A. Fowler, E. M. Fryer, Phys. Rev. **104**, 552 (1956).

⁴⁾ E. E. Huber, D. O. Smith u. J. B. Goodenough, J. appl. Phys. **29**, 294 (1958).

⁵⁾ H. J. Williams u. R. C. Sherwood, J. appl. Phys. **28**, 548 (1957).

⁶⁾ C. Kooy, Philips' Techn. Rundschau **19**, 387 (1957/58).

⁷⁾ R. C. Sherwood, J. P. Remeika u. H. J. Williams, J. appl. Phys. **30**, 217 (1959).

⁸⁻¹⁰⁾ s. S. 281.

untersucht, von Williams und Sherwood⁵⁾ aber auch Schichten aus reinem Eisen, Nickel und Kobalt. Allen gemeinsam ist die polykristalline Struktur und die künstlich erzeugte einachsige Magnetanisotropie. Um eine Deutung der Beobachtungen und den Vergleich mit dem kompakten Material zu erleichtern, erscheint es zweckmäßig, die Bezirksstruktur einkristalliner Schichten zu untersuchen. Im Anschluß an Untersuchungen von Elschner und Unangst¹¹⁾ wurden deshalb eingehende Beobachtungen über die magnetische Bezirksstruktur dünner Eisen-, Einkristall-Schichten angestellt.

Die dünnen Einkristall-Schichten wurden nach der von Lassen und Brück¹²⁾ angegebenen Methode hergestellt, bei der man im Hochvakuum auf eine einkristalline Unterlage aufdampft, die eine bestimmte Temperatur besitzen muß. Als Unterlage wurde Steinsalz verwendet. Nach dem Ablösen der dünnen Einkristallschichten von der Unterlage wurden sie mit der bekannten Bitterstreifen-Methode untersucht¹³⁾¹⁴⁾. Die Schichtdicke wurde interferometrisch bestimmt. Röntgenographische Untersuchungen der dicksten Schichten ($D \approx 10000 \text{ \AA}$) lassen auf eine Mosaikstruktur des Einkristalls schließen. Während der Beobachtung mit dem Mikroskop konnte ein magnetisches Feld angelegt werden, das mit einer Helmholtz-Spule bzw. mit einem Elektromagneten zwischen geeignet geformten Polschuhen erzeugt wurde, und dessen Richtung in der Schichtebene lag. Schicht und Magnet befanden sich während der Untersuchung unter einer Glasglocke bzw. einem Gummibalg, so daß durch Einstellen einer geeigneten Luftfeuchtigkeit ein schädliches Verdunsten der Fe_3O_4 -Seifen-Suspension vermieden wurde. Weitere Einzelheiten sind in ¹⁵⁾ und ¹⁶⁾ angegeben.

Die durch die Unterlage aufgezwungene kristallographische Orientierung der dünnen Eisen-, Einkristall-Schicht ist für die Untersuchungen sehr günstig. Indem sich beim Aufdampfen die (100)-Ebene des Eisengitters parallel zur Oberfläche der Unterlage einstellt, liegen gleichzeitig zwei Richtungen leichtester Magnetisierbarkeit in der Schichtebene. Die dritte Richtung, senkrecht zur Schichtoberfläche, ist wegen des großen Entmagnetisierungsfaktors in dieser Richtung gegenüber den beiden anderen energetisch so benachteiligt, daß sie nicht eingenommen wird.

Die dünnen Schichten besitzen also zwei Vorzugslagen der Magnetisierung, die senkrecht aufeinander stehen und in der Schichtebene liegen.

Die Bitterstreifenmuster von dünnen Schichten sind, wegen unvermeidbarer Unebenheiten von Unterlage und Schicht, nicht so klar und deutlich wie beim kompakten Material. Besonders kontrastarm werden die Muster bei dünnsten Schichten. Neben den schwächeren Streufeldern macht sich hier beim Betrachten besonders das verminderte Reflexionsvermögen der Schichtoberfläche störend bemerkbar.

⁵⁾ R. M. Moon, J. appl. Phys. **30**, 828 (1959).

⁹⁾ H. W. Fuller u. H. Rubinstein, J. appl. Phys. **30**, 848 (1959).

¹⁰⁾ M. E. Hale, H. W. Fuller u. H. Rubinstein, J. appl. Phys. **30**, 789 (1959).

¹¹⁾ B. Elschner u. D. Unangst, Z. Naturforsch. **11a**, 98 (1956).

¹²⁾ H. Lassen u. L. Brück, Ann. Phys. **22**, 65 (1935).

¹³⁾ W. C. Elmore, Phys. Rev. **54**, 309 (1938).

¹⁴⁾ H. J. Williams, R. M. Bozorth u. W. Shockley, Phys. Rev. **75**, 155 (1949).

¹⁵⁾ D. Unangst, Diplomarbeit, Physik. Inst., Jena 1956.

¹⁶⁾ D. Unangst, Dissertation, Jena 1959.

Falls nicht ausdrücklich anders bemerkt, lag bei den Untersuchungen die Richtung des äußeren Feldes immer in der Schichtebene. Die Richtungen leichtester Magnetisierbarkeit werden mit LR , die Halbierende der Winkel zwischen den beiden in der Schichtebene liegenden „leichten“ Richtungen mit WLR abgekürzt. Der Winkel, den ein äußeres Feld mit einer WLR bildet, wird mit α_H bezeichnet.

Die Bezirksstruktur remanent magnetisierter Schichten

Hat man eine dünne, „einkristalline“ Eisenschicht durch ein Magnetfeld hinreichender Stärke parallel zu einer LR magnetisch gesättigt, so entstehen, nachdem das Feld abgeschaltet worden ist, bei geeigneter Schichtdicke an den Schichträndern und an Löchern in der Schicht unter Umständen Bezirke, welche die Magnetisierung so umlenken, daß an den Schichträndern oder an Löchern ein möglichst kleines Streufeld entsteht (Néelsche Abschlußbezirke). Im allgemeinen werden diese Abschlußbezirke durch 90° -Wände gebildet, doch können bei Schichten, deren Dicke $D \approx 3000 \text{ \AA}$ beträgt, auch 180° -Wände mit beteiligt sein.

Bei den dicksten Schichten ($D \approx 10000 \text{ \AA}$) treten die 180° -Wände nicht nur an den Abschlußbezirken auf. Nach dem Abschalten des sättigenden Feldes entstehen, wie beim kompakten Material, sehr viele Bezirke mit 90° - und 180° -Wänden an beliebigen Stellen der Schicht. Unterhalb von etwa 800 \AA Schichtdicke konnten keine oder nur sehr kleine Abschlußbezirke nachgewiesen werden.

Die hier angegebenen Grenzen für die Existenz bestimmter Wandtypen sind naturgemäß sehr verwaschen; sie sollen, auch bei den folgenden Ausführungen, nur als ungefähre Richtwerte angesehen werden.

Die Bezirksstruktur im Innern der Schicht

Bei den dünnen Schichten kann man, wegen der engen Nachbarschaft der beiden Oberflächen, vermuten, daß sich die Wände senkrecht zu den Grenzflächen unverändert durch die ganze Schicht erstrecken. Auf der Ober- und Unterseite der dünnen Schicht müßte dann die gleiche Bezirksstruktur auftreten (Abb. 1 und 2). Das ist auch bei den dicksten untersuchten Schichten tatsächlich der Fall.

Die Bezirksstruktur dünner Schichten in Abhängigkeit von der Feldstärke

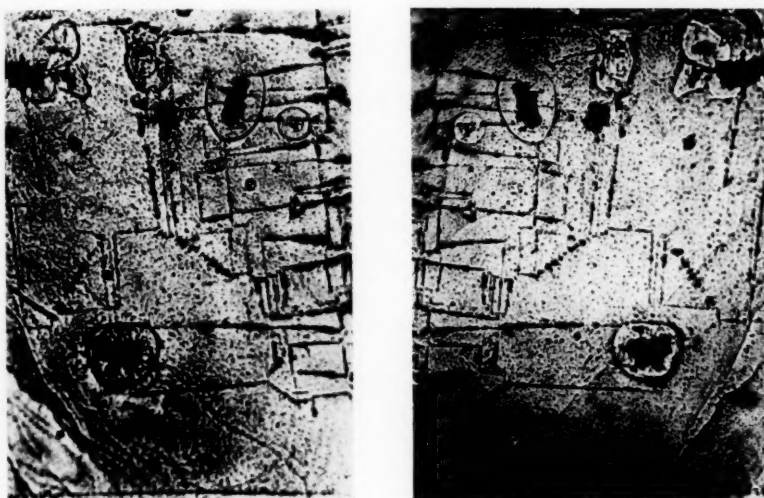
Für die Untersuchung des Ummagnetisierungsvorganges wurde das parallel zu einer LR liegende und die Schicht sättigende äußere Magnetfeld, während der Beobachtung mit dem Mikroskop, langsam und stetig verkleinert, dann umgepolt und das nun antiparallel zur ursprünglichen Richtung liegende Feld langsam vergrößert.

Im folgenden werden die Vorgänge bei einigen Schichtdicken beschrieben, bei denen die Verhältnisse möglichst klar und charakteristisch sind.

1. Schichtdicke $D \approx 10000 \text{ \AA}$

Durch Verkleinern des die Schicht zunächst sättigenden Feldes wachsen an den Schichträndern oder an Löchern in der Schicht dolchförmige Abschluß-

bezirke, die zunächst nur durch 90°-Wände gebildet werden, in die sich aber, bei noch weiterer Verkleinerung des äußeren Magnetfeldes, auch 180°-Wände mit einordnen (Abb. 3a). Es entstehen so „treppenförmige“ Gebilde. Nach



0,01 cm

Abb. 1 und 2. Bezirksstruktur auf Oberseite (Abb. 1) und Unterseite (Abb. 2) der gleichen Schichtstelle

abgeschaltetem äußeren Feld sind also schon Bezirke vorhanden, in denen die Magnetisierung antiparallel zu den Magnetisierungsvektoren der ursprünglich gesättigten Schicht liegt (Abb. 3b). Diese Bezirke wachsen beim langsamen Vergrößern des ummagnetisierenden Feldes durch Wandverschiebung auf Kosten der anderen Bezirke mit energetisch ungünstig liegender Magnetisierung, bis die Schicht vollkommen ummagnetisiert ist (Abb. 3c). Die Wandverschiebung erfolgt teilweise reversibel.

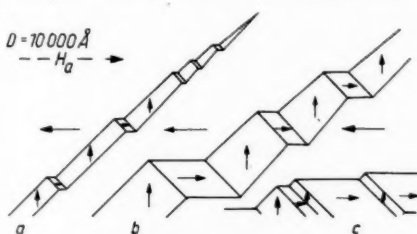


Abb. 3. Schema des Ummagnetisierungsvorganges bei etwa 10000 A dicken Schichten.

Fotografiert man die Weißschen Bezirke während der Ummagnetisierung, so kann man aus deren Größe die dazugehörige Hysteresisschleife konstruieren. Hierzu brauchen nur die Magnetisierungsvektoren der einzelnen Bezirke, deren Lage u. a. durch die bekannte kristallographische Orientierung der Schicht angebar, und deren Beträge proportional der Flächen der jeweiligen Bereiche zu setzen ist, addiert und die Summe auf

eine bestimmte Größe normiert zu werden. Dieses Verfahren ist zulässig, weil die Wände die Schicht unverändert durchsetzen, also die Bezirksstruktur

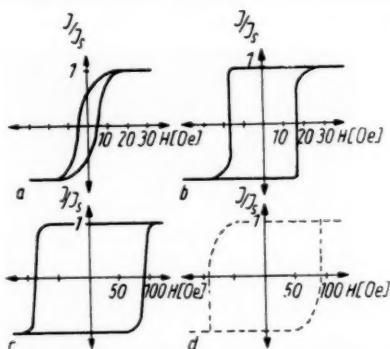


Abb. 4. Hysteresiskurven bei verschiedenen Schichtdicken.

- a) $D = 20\,000 \text{ \AA}$, b) $D = 3\,000 \text{ \AA}$,
c) $D = 750 \text{ \AA}$, d) $D = 550 \text{ \AA}$

dünnen Schichten der angegebenen Dicke annähernd wie kompaktes Material verhalten.

2. Schichtdicke $D \approx 3000 \text{ \AA}$

Bei den Schichten mit der Dicke $D \approx 3000 \text{ \AA}$ und kleiner fällt zunächst auf, daß nach Abschalten des sättigenden Feldes keine 180° -Wände mehr auftreten. Die Abschlußbezirke, die sich an den Schichträndern oder an den Löchern bilden, werden nur durch 90° -Wände begrenzt (Abb. 9a). Vergrößert man das ummagnetisierende Feld, so wachsen zunächst diese „primären“ Bezirke. Erst von einer bestimmten Feldstärke ab entstehen an den 90° -Wänden der Abschlußbezirke neue, dolchförmige, „sekundäre“ Bezirke, deren eine Seite von einer kurzen 180° -Wand begrenzt wird (Abb. 9b). Sehr lange Bereiche erstrecken sich bis zur gegenüberliegenden Wand des „Primärbezirkes“ und bilden dann, wie bei den dickeren Schichten, eine „Stufe“. Im Innern der „Sekundärbezirke“ liegt die Magnetisierung parallel zum äußeren Feld. Jetzt genügt schon ein kleiner Feldstärkezuwachs, um die Schicht vollständig in die Richtung des äußeren Feldes zu magnetisieren. Dabei wachsen die sich zuletzt gebildeten Bezirke, in denen die Magnetisierung am günstigsten liegt, auf Kosten der anderen, indem sich im wesentlichen die 90° -Wände verlängern (Abb. 9c). Die 180° -Wände verändern kaum ihre Länge.

Vermittels der zweimaligen Drehung der Magnetisierung um 90° in den „Primär-“ und „Sekundärbezirken“ wird eine Ummagnetisierung unter weitgehender Vermeidung von 180° -Wänden erreicht. Da die Wandverschiebung hier irreversibel abläuft — die Bezirksstruktur bleibt in jeder Phase der Ummagnetisierung beim Abschalten des äußeren Feldes erhalten und verändert sich erst dann wieder, wenn die ursprüngliche Feldstärke überschritten wird — können auch bei diesen Schichtdicken 180° -Wände ohne äußeres Feld beobachtet werden. Jedoch sind diese nicht, wie bei den dickeren Schichten, „spontan“ entstanden, sondern sie sind durch das äußere Feld beim Ummagneti-

im Schichtinnern praktisch der auf der Oberfläche entspricht. Die Genauigkeit ist für die qualitativen und orientierenden Untersuchungen ausreichend. Die magnetisierende Feldstärke wird aus der Stromstärke und den Daten der Helmholtz-Spule berechnet. Abb. 4a zeigt eine so konstruierte Hysteresisschleife. Ein typisches Muster, das während der Ummagnetisierung entsteht, ist in Abb. 5 zu sehen. Ausführlichere Aufnahmen vom Ummagnetisierungsvorgang sind in ¹⁶⁾ angegeben. Aus der Bereichsstruktur, der Form der Ummagnetisierungskurve, den Werten für die Koerzitivkraft und der relativen Remanenz kann geschlossen werden, daß sich die

sieren „induziert“ worden und dann beim Abschalten des Magnetfeldes „eingefroren“. Gegenüber den dicken Schichten ist die Wandverschiebung also stark behindert.



Abb. 5



Abb. 6

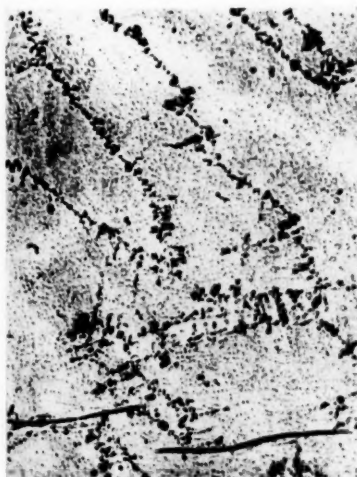


Abb. 7



Abb. 8

etwa 0,01 cm

Abb. 5–8. Für verschiedene Schichtdicken charakteristische Muster, die beim Um-magnetisieren entstehen.

Abb. 5. $D = 20\,000\text{ Å}$, Abb. 6. $D = 3\,000\text{ Å}$, Abb. 7. $D = 750\text{ Å}$, Abb. 8. $D = 550\text{ Å}$

Ein Beispiel für die bei diesem Typ der Ummagnetisierung entstehenden Muster ist in Abb. 6 zu sehen, die dazugehörige Hysteresisschleife zeigt Abb. 4b. Wegen der ineinandergeschachtelten „Primär-“ und „Sekundärbezirke“ werden die Muster sehr unübersichtlich. Die Koerzitivkraft und die relative Remanenz sind im Vergleich zu den Werten dickerer Schichten angewachsen.

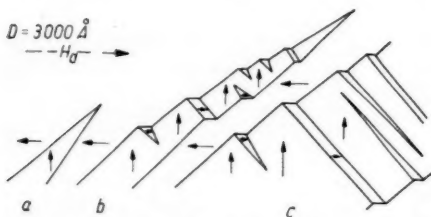


Abb. 9. Schema des Ummagnetisierungsvorganges bei etwa 3000 Å dicken Schichten

Da außerdem unterhalb von etwa 800 Å Schichtdicke keine Abschlußbezirke auftreten, geht die Ummagnetisierung nicht mehr von den an Rändern oder Löchern sitzenden, das Streufeld vermindern den Abschlußbezirken aus, vielmehr bilden sich auch an ungestörten Schichtstellen, von einer bestimmten Stärke des Gegenfeldes ab, langgestreckte Bezirke, in denen die Magnetisierung um 90° gegenüber ihrer Umgebung gedreht ist.

Es soll hier schon darauf hingewiesen werden, daß die Wände dieser Bezirke nicht wie die 90°-Wände im kompakten Material parallel zur *WLR* verlaufen, sondern einen Winkel größer als 45° mit derjenigen *LR* bilden, die etwa parallel zum äußeren Feld liegt. Auf diese Erscheinung wird noch später eingegangen.

Bei der Ummagnetisierung bilden sich zunächst die schon erwähnten langgestreckten Keime, und da das äußere Feld parallel zu einer *LR* verläuft, sind zwei Lagen dieser „nadelförmigen“ Bezirke gleichberechtigt (Abb. 10a). Ein Wachstum der „nadelförmigen“ Ummagnetisierungskeime durch Wandverschiebung ist kaum zu bemerken. Es bilden sich bei größeren Feldstärken nur neue Bereiche, die mit anderen verschmelzen und so größere ergeben können.

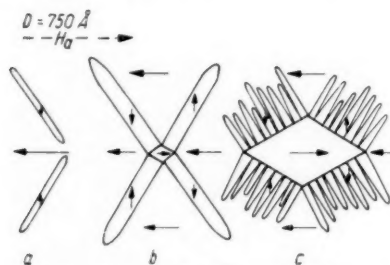


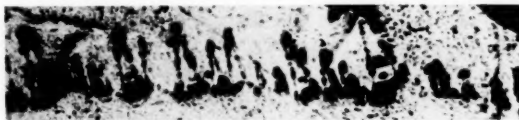
Abb. 10. Schema des Ummagnetisierungsvorganges bei etwa 750 Å dicken Schichten

Überkreuzen sich solche Bereiche verschiedener Richtungen, so kann sich die Magnetisierung an der Überkreuzungsstelle wiederum um 90° drehen. Sie liegt jetzt parallel zum äußeren Ummagnetisierungsfeld (Abb. 10b und 10c). Durch diesen Mechanismus können 180°-Wände gänzlich vermieden werden.

Der zwischen der schon ummagnetisierten Stelle und der noch in der ursprünglichen Richtung magnetisierten Umgebung liegende „Übergangsbereich“ verschiebt sich ähnlich einer Wand. Auch hier genügen, wenn sich einmal die „Übergangsstruktur“ ausgebildet hat, nur kleine Feldstärkeerhöhungen zur vollständigen Ummagnetisierung. In Abb. 4c ist

die Hysteresisschleife und in Abb. 7 eine typische Phase der Ummagnetisierung dargestellt.

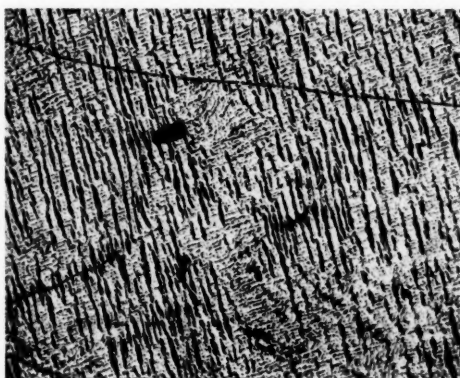
Auch bei etwas dickeren Schichten bemerkt man schon Andeutungen von „Übergangsstrukturen“. Besonders deutlich wurden solche Strukturen bei etwa 900 Å dicken Schichten beobachtet. Die bei der Ummagnetisierung dieser Schichten entstehenden „Primär-“ und „Sekundärbezirke“ können, wenn die Schicht möglichst fehlerfrei ist, wenn also die Ummagnetisierung von möglichst wenig Stellen gleichzeitig ausgeht, ein Muster ergeben, das dem „Übergangsbereich“ der dünneren Schicht ähnlich sieht (Abb. 11).



0,01 cm

Abb. 11. „Übergangsstruktur“ bei einer etwa 900 Å dicken Schicht

Bemerkenswert bei den 750 Å dicken Schichten ist noch der Ablauf der Ummagnetisierung, wenn das äußere Feld einen von Null verschiedenen Winkel mit einer LR bildet. Zunächst entstehen, wegen der Bevorzugung durch das äußere Feld, nur noch „nadelförmige“ 90° -Bezirke einer Richtung. Durch Zusammenwachsen einzelner Bereiche entstehen größere, in deren Innern sich erneut Keime bilden, die wieder von 90° -Wänden begrenzt werden (Abb. 12). Die Ummagnetisierung läuft also in zwei Etappen ab, in deren Verlauf die Magnetisierung jeweils um 90° gedreht wird. Beide Etappen können sich bei kleinen Winkeln zwischen dem äußeren Feld und einer LR zeitlich überlappen; bei großen Winkeln folgen sie nacheinander. Betrachtet man die pauschale Magnetisierung der Schicht, so kann eine kontinuierliche Drehung der Magnetisierung vorgetäuscht werden, während in Wirklichkeit ein zweimaliges unstetiges Umlappen der Magnetisierung einzelner Schichtteile um je 90° erfolgt.



0,01 cm

Abb. 12. Muster, das beim Ummagnetisieren einer etwa 750 Å dicken Schicht entsteht, wenn das äußere Feld nicht parallel zu einer Richtung leichtester Magnetisierbarkeit liegt

4. Schichtdicke $D \approx 550 \text{ \AA}$

Mit abnehmender Schichtdicke weicht der Winkel zwischen der Wandrichtung der Keime und einer LR mehr und mehr von 45° ab, bis bei etwa 500 \AA bis 600 \AA Schichtdicke nahezu ein Winkel von 90° erreicht wird. Die Wand steht dann senkrecht zur Richtung des ummagnetisierenden Feldes. Gleichzeitig wird eine Erscheinung erkennbar, die anscheinend unterhalb einer Schichtdicke von 550 \AA den Charakter des Ummagnetisierungsvorganges allein bestimmt. Gleichgültig in welcher Richtung die Schicht magnetisiert wird, immer zeigt sich nämlich das gleiche Bild, d. h., bei diesen Schichtdicken ist kaum noch ein Einfluß der Kristallanisotropie auf den Ummagnetisierungsvorgang zu bemerken. In der ersten Phase der Ummagnetisierung entstehen viele, lange, schmale Bezirke, deren Wände nahezu senkrecht zum äußeren Feld verlaufen. Verkleinert man die Feldstärke, so verschwinden diese Bezirke wieder. Erst von einer bestimmten Feldstärke an bilden sich einzelne, größere Bereiche, deren Wände ungefähr parallel zum äußeren Feld liegen, und die bei weiterer Feldstärkevergrößerung durch Wandverschiebung wachsen (Abb. 8). Im Innern dieser Bereiche entstehen im weiteren Verlauf der Ummagnetisierung keine Weißschen Bezirke mehr. Die dünne Schicht ist ummagnetisiert.

Das Schema dieses Vorganges zeigt Abb. 13. Dabei ist angenommen worden, daß die Kristallanisotropie überhaupt keinen Einfluß mehr auf die Lage der Magnetisierung ausübt. Zur Begründung dieser Annahme wird weiter

$D = 550 \text{ \AA}$
 $--- H_0 --- \rightarrow$

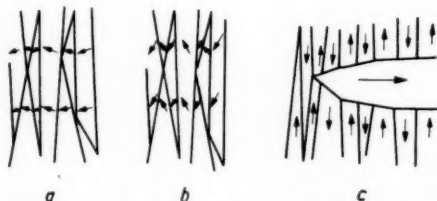


Abb. 13. Schema des Ummagnetisierungsvorganges bei etwa 550 \AA dicken Schichten

unten noch einiges ausgeführt. Die Schicht ist also gesättigt und danach das Gegenfeld angelegt worden. Dieses Gegenfeld dreht die Magnetisierung zunächst reversibel aus der Richtung der Sättigungsmagnetisierung heraus. Da kein Drehsinn bevorzugt ist, werden einzelne Bereiche entstehen, in denen sich aber die Magnetisierung einheitlich in einer Richtung dreht. Die Wände stellen sich so ein, daß ein Minimum an Energie benötigt wird. Das ist der Fall, wenn die Wände mit der Richtung des ummagnetisierenden Feldes einen Winkel von 90° bilden. Schaltet man in diesem Stadium der Ummagnetisierung das äußere Feld ab, so verschwinden die vielen kleinen Bezirke wieder. Die Drehung wird so lange reversibel sein, bis die Magnetisierung in benachbarten Bezirken antiparallel zueinander steht. Die dabei auftretenden „ 180° -Wände“ sind aber sehr instabil, denn schon ein kleiner Feldstärkezuwachs genügt, um die Magnetisierung einzelner Teile der Schicht vollkommen umzuklappen (Abb. 13a–c). Die in Abb. 4d dargestellte Ummagnetisierungskurve ist nicht gemessen, sondern nur qualitativ angedeutet, da eine Auswertung nach der angegebenen Methode, wegen der Kleinheit der Bezirke, praktisch nicht mehr durchführbar ist. Die Koerzitivkraft kann man aus den Beobachtungen abschätzen. Wegen der teilweisen

reversiblen Drehung ist die Kurve abgerundeter als die der Schichten zwischen 700 Å und 3000 Å. Die Beobachtung, daß, von sehr dicken Schichten her beginnend, die „Rechteckigkeit“ der Hysteresisschleifen erst zu- und dann wieder abnimmt, was einer Zu- bzw. Abnahme der relativen Remanenz entsprechen kann, scheint eine allgemeine Eigenschaft dünner Schichten zu sein ¹⁷⁾¹⁸⁾¹⁹⁾.

Ähnliche Muster beobachteten Fuller und Rubinstein⁹⁾ bei 950 Å dicken, auf einer Glasunterlage aufgedampften Eisenschichten. Wahrscheinlich verschwindet der Einfluß der Kristallenergie bei polykristallinen Schichten schon bei größeren Schichtdicken, so daß Muster entstehen können, die bei den einkristallinen Schichten erst bei etwa 500 Å Dicke auftreten.

5. Schichtdicke $D \approx 500$ Å

Unterhalb von etwa 500 Å Schichtdicke konnten, auch während des Umagnetisierungsvorganges, keine Wände nachgewiesen werden. Besonders deutlich geht das aus dem Verhalten einer Schicht hervor, deren Dicke etwa zwischen 450 Å und 550 Å schwankt. Vergleicht man die beiden Aufnahmen Abb. 14 und 15, von denen Abb. 14 im Durch-, Abb. 15 im Auflicht aufgenommen worden ist, so erkennt man, daß bei den dünnsten Stellen keine Wände zu



Abb. 14



Abb. 15

0,01 cm

Abb. 14 und 15. Auflicht- (Abb. 14) und Durchlichtaufnahme (Abb. 15) einer keilförmigen Schicht. Dünnste Stelle (linker Bildrand) etwa 450 Å, dickste Stelle etwa 550 Å

¹⁷⁾ L. Reimer, Z. Naturforschg. **12a**, 550 (1957).

¹⁸⁾ W. Ruske, Ann. Phys., **2**, 276 (1958).

¹⁹⁾ K. Záveta, Czech. J. Phys. **6**, 473 (1956).

bemerken sind. Die in der Durchlichtaufnahme sich nahezu rechtwinklig kreuzenden dunkleren Streifen — besonders deutlich links unten ausgeprägt — sind dickere Schichtstellen, die wahrscheinlich durch besonders günstige Kondensationsbedingungen an Stufen der einkristallinen NaCl-Unterlage entstanden sind. Das Fehlen einer in diesem Zusammenhang nicht beobachtbaren Bezirksstruktur bei Schichten der oben angegebenen Dicke kann folgende Gründe haben:

a) Am Ort der Wände entstehen keine Oberflächenpole; die Magnetisierung bleibt immer in der Schichtebene und eine Markierung der Wände mit der Bitterstreifen-Methode ist nicht möglich.

b) Die dünne Schicht verhält sich wegen des fehlenden Einflusses der Kristallanisotropie magnetisch wie ein Polykristall ohne Vorzugslagen. Selbst hergestellte, polykristalline Schichten entsprechender Dicke ergaben niemals Bitterstreifen.

c) Die Bezirksstruktur ist so feingliedrig, daß sie mit der Bitterstreifen-Technik nicht mehr aufgelöst werden kann.

6. Zusammenfassung der Vorgänge beim Ummagnetisieren

a) $D \approx 10000 \text{ \AA}$
90°- und 180°-Wände wie beim kompakten Material. Teilweise reversible Wandverschiebung.

b) $D \approx 3000 \text{ \AA}$
Zunächst nur 90°-Wände; 180°-Wände werden beim Ummagnetisieren „induziert“. Die Ummagnetisierung erfolgt durch Drehung der Magnetisierung in den „Primär-“ und „Sekundärbezirken“ um je 90°. Koerzitivkraft und Remanenz sind gewachsen. Die Wandverschiebung ist irreversibel.

c) $D \approx 750 \text{ \AA}$
Fast keine 180°-Wände beobachtbar. Die Ummagnetisierung geht nicht mehr von den Rändern oder Löchern in der Schicht aus. Es bilden sich dabei „Übergangsbereiche“. Die Hysteresisschleife ist rechteckig, die Koerzitivkraft ist weiter gewachsen.

d) $D \approx 550 \text{ \AA}$
Es ist kein Einfluß der Kristallanisotropie zu bemerken. Die Ummagnetisierung erfolgt durch teilweise reversible Drehung.

e) $D < 500 \text{ \AA}$
Es konnten keine Wände mehr beobachtet werden.

Die Bezirksstruktur entmagnetisierter Schichten

Das Wechselspiel zwischen den einzelnen Wandtypen bei verschiedenen Schichtdicken wirkt sich auch in der Bezirksstruktur entmagnetisierter Schichten aus. Die Entmagnetisierung erfolgte mit einem Wechselfeld von 50 Hz, dessen Stärke mit einem Flüssigkeitswiderstand stetig verändert werden konnte.

Bei den dicksten Schichten mit $D \approx 10000 \text{ \AA}$ kommen im wesentlichen, wie beim kompakten Material, die 180°-Wände gleichberechtigt neben den 90°-Wänden vor. Mit abnehmender Schichtdicke treten die 180°-Wände zu-

gunsten der 90° -Wände immer mehr zurück, bis von etwa 3000 \AA an fast nur noch 90° -Wände vorkommen. Hierdurch bedingt, bildet sich ein „schachbrettähnliches“ Muster aus (Abb. 16).

Nimmt die Schichtdicke weiter ab, werden die Verhältnisse zunächst komplizierter. Die von $D \approx 800 \text{ \AA}$ an entstehenden Muster sind abhängig vom Winkel, den das die Schicht entmagnetisierende Feld mit einer LR bildet. Wenn $\alpha_H = 45^\circ$ ist (Richtung des äußeren Feldes parallel zur LR), entstehen bei vorsichtiger Entmagnetisierung nur sehr kleine Bezirke an den Schichträndern. Wird α_H verändert, bemerkt man Bezirkmuster, die den „treppenförmigen“ Abschlußbezirken bei dickeren Schichten sehr ähnlich sehen. Allerdings fällt bei den „ 180° -Wänden“ die eigenartig gezahnte Struktur auf, die durch einen „Übergangsbe- reich“ erklärt werden kann (Abb. 17). Nähert sich α_H dem Wert 0° , entstehen nur 90° -Wände, die ein „schachbrettähnliches“ Muster bilden.

Die dünnsten Schichten mit nachweisbarer Bezirksstruktur ($D \approx 550 \text{ \AA}$), bei denen also kein Einfluß der Kristallanisotropie zu bemerken war, ergaben wieder ein anderes Bild. Gleichgültig in welcher Richtung das entmagnetisierende Feld lag, immer traten Wände auf, die annähernd parallel dazu verliefen und eigen-

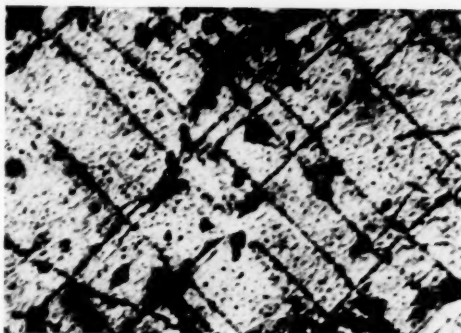


Abb. 16

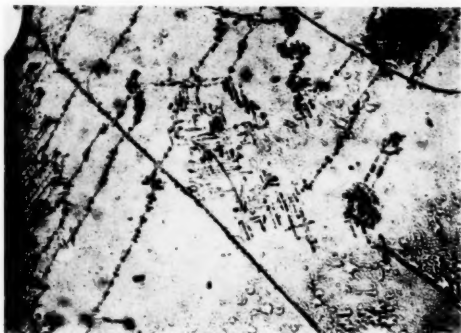


Abb. 17

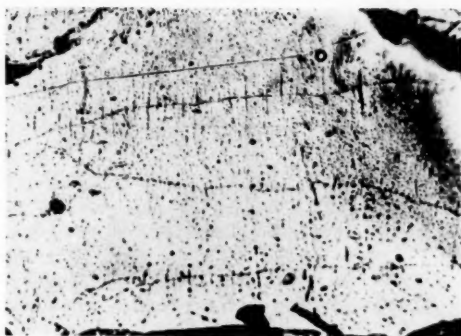


Abb. 18

0,01 cm (16, 18)

0,02 cm (17)

Abb. 16—18. Muster, die beim Entmagnetisieren mit einem Wechselfeld bei verschiedenen Schichtdicken entstehen. Abb. 16. $D = 1000 \text{ \AA}$, Abb. 17, $D = 750 \text{ \AA}$, Abb. 18. $D = 550 \text{ \AA}$

artige seitliche Abzweigungen aufwiesen (Abb. 18). Berücksichtigt man die Vorgänge, die beim Ummagnetisieren der dünnen Eisenschichten dieser

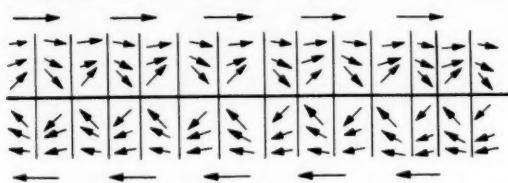


Abb. 19. Deutung der Wandstruktur bei etwa 500 Å dicken Schichten

zahlten „180°-Wände“ bei dickeren Schichten ($D \approx 750$ Å) auch schon eine derartige Struktur besitzen.

Zur Kristallanisotropie bei dünnen Schichten

Wie schon berichtet stehen die 180°-Wände bei den hier untersuchten, etwa 600 Å dicken Eisenschichten fast immer senkrecht zur Richtung des ummagnetisierenden Feldes. Trägt man den Winkel zwischen Wandrichtung

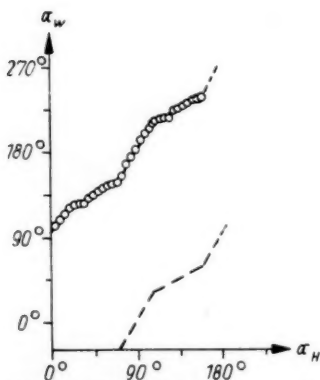


Abb. 20. Wandrichtung α_W in Abhängigkeit von der Richtung des ummagnetisierenden Feldes α_H bei einer etwa 500 Å dicken Schicht

und einer WLR (α_W) als Funktion des Winkels zwischen äußerem Feld und der gleichen WLR auf (α_H), so erhält man für eine 500 Å dicke Schicht den in Abb. 20 dargestellten Verlauf. Ein Einfluß der Anisotropie ist kaum noch vorhanden. Auch die beim Entmagnetisieren entstehenden „180°-Wände“ zeigen den gleichen Effekt. Eine weitere Stütze für die Abnahme der Anisotropie bei dünnsten Schichten ist die bei diesen Schichtdicken vorherrschende reversible Drehung der Magnetisierung bis zu einem Winkel von 90° zum ummagnetisierenden Feld. Auch die Abnahme der Sättigungsmagnetisierung^{20)–23)} und der Curie-Temperatur²⁴⁾²⁵⁾ mit abnehmender Schichtdicke machen ein Verschwinden der Kristallanisotropie bei dünnsten Schichten wahrscheinlich.

Die Wandenergie

Die Wandenergie dünner Schichten in Abhängigkeit von der Schichtdicke ist von Néel für 180°-Wände abgeschätzt worden²⁶⁾. Analoge Untersuchungen

²⁰⁾ L. E. Collins u. O. S. Heavens, *Phil. Mag.* **45**, 283 (1954).

²¹⁾ E. C. Crittenden u. R. W. Hoffmann, *Rev. mod. Phys.* **25**, 310 (1951).

²²⁾ W. Reincke, *Z. Phys.* **137**, 169 (1954).

²³⁾ M. J. Klein u. R. S. Smith, *Phys. Rev.* **81**, 378 (1951).

²⁴⁾ A. Drigo, *Nuovo Cim.* **8**, 498 (1951.)

²⁵⁾ W. Hellenthal, *Z. Naturforsch.* **13a**, 566 (1958).

²⁶⁾ M. L. Néel, *C. R. Acad. Sci. Paris* **241**, 533 (1955).

führte Stefani²⁷⁾ u. a. für 90°-Wände durch. Weitere Arbeiten liegen von Heber²⁸⁾ und Kaczér²⁹⁾ vor.

Nach dem von Williams, Bozorth und Shockley¹⁴⁾ aufgezeigten Weg ist es prinzipiell möglich, aus der Gestalt der Néelschen Abschlußbezirke die Wandenergie experimentell zu bestimmen. Man kann, wie im folgenden gezeigt wird, die Methode auf dünne Schichten übertragen und so die theoretischen Ergebnisse nachprüfen. Bei den folgenden Abschätzungen soll es auf Faktoren der Größenordnung 1 nicht ankommen.

Die Länge der das Streufeld an Löchern verkleinernden Abschlußbezirke ist durch das Minimum der zur Ausbildung dieser Bezirke nötigen Energie gegeben. Diese Energie setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, die einander entgegenwirken. Ein Energieanteil E_w kommt durch die Wandenergie der Abschlußbezirke zustande, der andere, E_e durch die Energie des entmagnetisierenden Feldes, das durch die Pole an den Wänden entsteht. Während der Energieterm E_w den Abschlußbezirk möglichst kurz zu machen versucht, bewirkt der Energieterm E_e eine Verlängerung des Bezirkes. Die stabile Länge l des Bereiches ist durch das Minimum der Gesamtenergie E_g gegeben, die sich aus E_w und E_e zusammensetzt.

Ist l die Länge einer „Zipfelmütze“, d ihre Basisbreite (oder der Durchmesser des Loches), D die Schichtdicke, V das Volumen des Abschlußbereiches und N sein Entmagnetisierungsfaktor, so ist die Energie des entmagnetisierenden Feldes gegeben durch:

$$E_e = \frac{1}{2} I_s^2 V N \frac{1}{a}. \quad (1)$$

Der Einfluß des am Loch auftretenden Streufeldes werde vernachlässigt. I_s ist die Sättigungsmagnetisierung, a ein Korrekturfaktor, der die Drehung der Magnetisierung durch das entmagnetisierende Feld berücksichtigt. Er wurde von Williams, Bozorth und Shockley¹⁴⁾ zu $a = 25$ bestimmt. Dieser Wert kann für die dünne Schicht übernommen werden, da die Drehung durch das entmagnetisierende Feld in der Schichtebene erfolgt.

Weil die Näherung für den Entmagnetisierungsfaktor durch den von Ellipsoiden zu grob ist — es ergeben sich physikalisch sinnlose Resultate — wird ein halbempirischer Ansatz gemacht:

$$N_{\text{zipf}} = 4\pi \left[\frac{1}{2} \frac{d}{l} + b_1 \left(\frac{d}{l} \right)^2 + b_2 \left(\frac{d}{l} \right)^3 + \dots \right] \quad (2)$$

Von den b_n lassen sich b_1 und b_2 durch folgende Bedingungen bestimmen:

1. Durch den Entmagnetisierungsfaktor N_{zipf} soll sich, mit dem bekannten Wert von l/d für die „Zipfelmütze“ des kompakten Materials, der bekannte Wert γ_0 für das kompakte Material ergeben. $\gamma_0 = 1,5 \text{ erg cm}^{-2}$, $(l/d)_{\text{kompakt}} = 12$ ³⁰⁾.

2. N_{zipf} soll sich für kleine l/d nicht zu weit von dem Entmagnetisierungsfaktor einer elliptischen Säule entfernen. Es sei für $d = l$: $N_{\text{ellip.}} = N_{\text{zipf}}$ (Halbachsen der Ellipse: l und $d/2$).

²⁷⁾ H. Stefani, Wiss. Z. der Univ. Jena, Math.-Nat.-Reihe 7, 373 (1957/58).

²⁸⁾ G. Heber, Wiss. Z. der Univ. Jena, Math.-Nat.-Reihe 5, 165 (1955/56).

²⁹⁾ J. Kaczér, Czech. J. Phys. 7, 557 (1957).

³⁰⁾ Der Wert wurde aus Aufnahmen von „Zipfelmützen“ an Siliziumeisen, die mir freundlicherweise Herr Prof. Dr. B. Elschner zur Verfügung stellte, bestimmt. Dieser Wert kann im Rahmen dieser Abschätzung verwendet werden, weil sich die Materialkonstanten für Siliziumeisen nur wenig von denen des reinen Eisens unterscheiden.

Mit diesen Bedingungen ergibt sich: $b_1 = 1,68$ und $b_2 = -1,85$. Damit erhält man für die spezifische Energie γ_{90}^* einer 90° -Wand und für die Energie E_g des Abschlußbezirkes in Abhängigkeit von der Schichtdicke D :

$$\gamma_{90}^* = \frac{1}{2} \frac{I_s^2}{25} d\pi \left[1,68 \left(\frac{d}{l} \right)^2 - 3,70 \left(\frac{d}{l} \right)^3 \right] \quad (3)$$

$$E_g = \frac{1}{2} \frac{I_s^2}{25} D d l 4\pi \left[\frac{1}{2} \frac{d}{l} + 1,68 \left(\frac{d}{l} \right)^2 - 1,85 \left(\frac{d}{l} \right)^3 \right] + 4 \gamma_{90}^* D l. \quad (4)$$

Die Auswertung von etwa 200 verschiedenen Abschlußbereichen bei Schichten von 800 Å bis 10000 Å Dicke ergab eine deutliche Abnahme der Werte l/d mit abnehmender Schichtdicke (Abb. 21). Es wurden nur solche „Zipfelmützen“ vermessen, deren Basisbreite $d \approx 10^{-3}$ cm betrug.

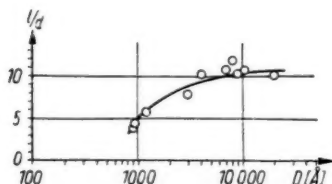


Abb. 21. Gemessene Verhältnisse der Länge zur Breite einer Zipfelmütze (l/d) als Funktion der Schichtdicke D

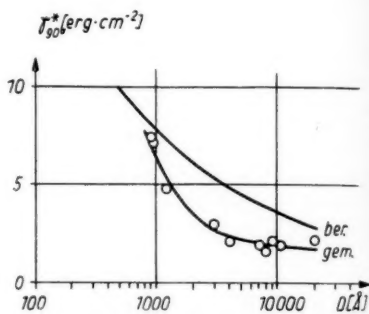


Abb. 22. Vergleich der nach dem Néel'schen Modell²⁶⁾ berechneten Wandenergie einer 90° -Wand γ_{90}^* (ber.) mit der aus den Meßwerten mit Gl. (3) gewonnenen (gem.) als Funktion der Schichtdicke D

In der graphischen Darstellung Abb. 22 sind die nach Gl. 3 ausgewerteten und die nach dem Néel'schen Modell berechneten Wandenergien in Abhängigkeit von der Schichtdicke aufgetragen. Die Übereinstimmung der beiden Kurven erscheint uns, in Anbetracht der groben Abschätzungen, zufriedenstellend.

Zum Verschwinden der Abschlußbezirke bei kleinen Schichtdicken ($D \approx 800$ Å)

Bei der Diskussion der Beziehung zwischen Gesamtenergie E_g einer „Zipfelmütze“ und der Schichtdicke D (Gl. 4), bemerkt man, daß von einer bestimmten Schichtdicke an das relative Minimum von E_g verschwindet, d. h., es existiert ohne äußeres Feld keine von Null verschiedene stabile Länge l des Abschlußbezirkes. Die Auswertung ergibt für die Schichtdicke, von der ab die „Zipfelmützen“ verschwinden, den Wert $D \approx 800$ Å in überraschend guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen.

Für die Energie des Streufeldes E_s , das sich an einem Loch ausbilden würde, wenn kein Abschlußbezirk vorhanden wäre, erhält man, wenn das Streufeld am Loch durch das eines äquivalenten Dipols ersetzt wird, die Beziehung

$$E_s = I_s^2 D^2 d. \quad (5)$$

Die graphische Darstellung Abb. 23 zeigt, daß die Streufeldenergie E_s unterhalb etwa 20000 Å Schichtdicke kleiner ist als die Gesamtenergie E_g der „Zipfelmütze“. Zur besseren Übersicht ist in der graphischen Darstellung Abb. 24 die Gesamtenergie E_g eines Abschlußbezirkes als Funktion des Verhältnisses l/d (d etwa 10^{-3} cm) mit der Schichtdicke D als Parameter aufgetragen. Gleichzeitig ist die Energie E_s des Streufeldes eingetragen, wenn sich kein Abschlußbezirk bilden würde. Die jeweiligen Kurven sind bis auf den entsprechenden Wert

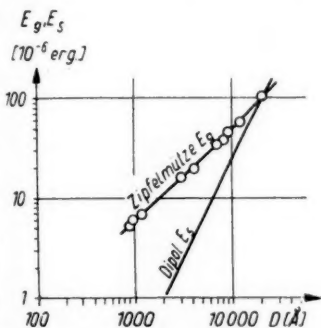


Abb. 23. Vergleich der Streufeldenergie E_s mit dem Energieinhalt einer „Zipfelmütze“ E_g an Löchern mit dem Durchmesser $d = 10^{-3}$ cm in Abhängigkeit von der Schichtdicke D

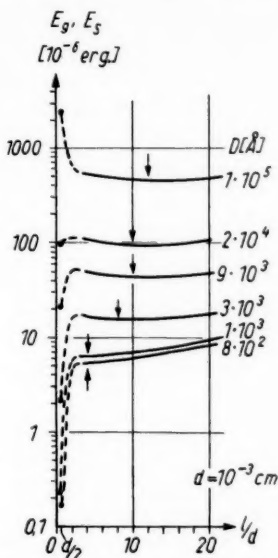


Abb. 24. Die Energie des Streufeldes E_s bzw. der „Zipfelmütze“ E_g in Abhängigkeit von dem Verhältnis Länge zu Breite der „Zipfelmütze“ (l/d) mit der Schichtdicke D als Parameter

von E_s extrapoliert worden (gestrichelter Teil der Kurven), da eine Berechnung, wegen der schlechten Näherung des Entmagnetisierungsfaktors N_{zlf} für kleine l/d , nicht sinnvoll erscheint.

Man kann folgende Fälle unterscheiden:

1. $D \approx 20000$ Å

Es tritt nur ein Minimum auf; an den Löchern müssen sich „Zipfelmützen“ ausbilden, da die sonst aufzuwendende Streufeldenergie größer wäre als die für die Abschlußbezirke nötige.

2. $800 \text{ Å} < D < 20000$ Å

Die Kurven besitzen zwei Minima. „Zipfelmützen“ können auftreten.

3. $D < 800$ Å

Es existiert nur ein Minimum, das dann eingenommen wird, wenn keine Abschlußstruktur entsteht.

Die im Schichtdickenbereich von 800 Å bis 20000 Å auftretenden Abschlußbezirke finden, etwa beim Ummagnetisieren, durch das relative Minimum von E_g stabile Verhältnisse und können dann ihre Länge, wegen des dazu nötigen Energieaufwandes, nicht mehr ändern.

Der Einfluß des Verhältnisses der Energie einer 180°-Wand zu der einer 90°-Wand auf den Ummagnetisierungsvorgang

Betrachtet man eine kreisförmige Schicht, so sind zur Erzeugung der pauschalen Magnetisierung Null mindestens die in Abb. 25 eingezeichneten 180°- bzw. 90°-Wände notwendig, wenn man von Randeinflüssen absieht. Welche Struktur bevorzugt wird, hängt von dem Verhältnis der Energien der beiden Wandtypen ab. Man erkennt leicht, daß zur Ausbildung der Struk-

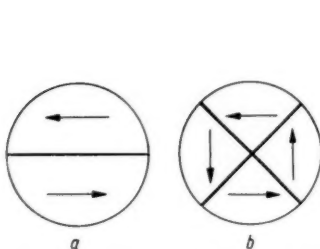


Abb. 25. Einfachste Zerlegung einer kreisförmigen Schicht mit verschwindender resultierender Magnetisierung, wenn a) die 180°-Wand, b) die 90°-Wand energetisch bevorzugt wird. Von Randeinflüssen wird abgesehen

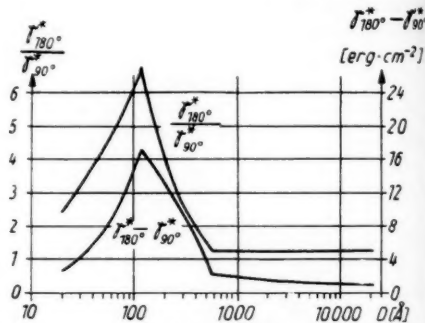


Abb. 26. Verhältnis und Differenz der spezifischen Energie einer 180°-Wand und 90°-Wand in Abhängigkeit von der Schichtdicke

tur in Abb. 25 b doppelt soviel Wandfläche benötigt wird wie bei der in Abb. 25 a. Je nachdem nun $\gamma_{180}^*/\gamma_{90}^*$ kleiner oder größer als 2 ist, werden die 180°- bzw. 90°-Wände bevorzugt. Entsprechendes gilt auch für die Wände beim Ummagnetisieren.

Berechnet man die Verhältnisse der Wandenergien, die nach den Néelschen Modellen gewonnen worden sind, so erhält man die in Abb. 26 dargestellte Abhängigkeit. Diese gibt im Groben die beobachteten Erscheinungen richtig wieder, wenn man bedenkt, daß die abgeleiteten Beziehungen für die Wandenergie nur Näherungen sind.

Wird beachtet, daß die Häufigkeit der beiden Wandtypen bei einer bestimmten Schichtdicke nicht nur vom Verhältnis der Energie der beiden Wandtypen, sondern auch von deren Differenz abhängt, so ist auch das zunächst mit abnehmender Schichtdicke nur „zögernde“ Verschwinden der 180°-Wände zu erklären, bis dann unterhalb von 1000 Å Schichtdicke der steile Anstieg von $\gamma_{180}^*/\gamma_{90}^*$ es verständlich macht, daß nur noch 90°-Wände auftreten (Abb. 26).

Betrachtungen zur Koerzitivkraft bei dünnen Schichten

1. Schichtdicke $D > 20000 \text{ Å}$

Da sich die Schichten dieser Dicke annähernd wie kompaktes Material verhalten, dürften auch die dafür üblichen Betrachtungen über die Koerzitivkraft gelten (Fremdkörpertheorie, Spannungstheorie usw.).

2. Schichtdicke $800 \text{ \AA} < D < 20000 \text{ \AA}$

Beim Ummagnetisieren muß zur Bildung von Abschlußbezirken das äußere Feld in der Lage sein, die Energiedifferenz $E_g - E_s$ zu decken (Abb. 24).

Unter der Annahme, daß die Wandreibung beim weiteren Vergrößern der „Zipfelmützen“ vernachlässigt werden kann, ist die zur Bildung eines Abschlußbezirkes nötige Feldstärke ungefähr gleich der Koerzitivkraft, weil die Kurven für E_g verhältnismäßig flach verlaufen. Der Energiebeitrag zur Vergrößerung der „Zipfelmützen“ kann dann im Rahmen dieser Abschätzung gegenüber der Energiedifferenz $E_g - E_s$ vernachlässigt werden. Ein Bezirk mit dem Volumen V , dessen Magnetisierung I_s um 90° gegenüber dem äußeren Ummagnetisierungsfeld der Stärke H_a gedreht ist, hat die Energie:

$$E = I_s H_a V \quad (6)$$

Setzt man $E \approx E_g - E_s$ und $H_a \approx H_c$, so ergibt sich:

$$H_c \approx \frac{E_{g,m} - E_s}{I_s D d l_m} \quad (7)$$

Dabei gibt l_m die durch das relative Minimum von E_g gegebene stabile Länge der „Zipfelmützen“, $E_{g,m}$ ihre Energie im Minimum, d ihre Basisbreite und D die Schichtdicke an.

3. Schichtdicke $D < 800 \text{ \AA}$

Man könnte sich vorstellen, daß auch nach Verschwinden des relativen Minimums von E_g bei dünneren Schichten die Ummagnetisierung von Löchern oder Schichträndern ausgeht, da durch ein hinreichend starkes äußeres Feld H_a stabile „Zipfelmützen“ entstehen müßten. Die Koerzitivkraft vergrößert sich jedoch nach dieser Vorstellung nicht beliebig, weil von einer bestimmten Feldstärke an, bei endlicher Kristallenergie, in einzelnen Teilgebieten der Schicht eine gleichzeitige Drehung aller Elementarmagnete (also ohne Wandverschiebung) um 90° eintreten kann. Eine Feldstärke, die das erreicht, ist etwa gleich der Koerzitivkraft, weil sowohl eine Drehung um 90° im positiven als auch im negativen Sinn möglich ist, die pauschale Magnetisierung also Null werden kann. Dabei bilden sich aber auch Wände. Die Energie des außen angelegten Feldes hat so, außer der zur Drehung der Magnetisierung benötigten, noch den Energiebetrag für die Wände zu decken. Für dieses Modell gilt die Energiebilanz:

$$I_s H_c V = K_D^* V + \gamma_{90}^* F \quad (8)$$

V ist das Volumen der um 90° gedrehten Teilgebiete, F die Fläche der entstandenen Wände mit der spezifischen Energie γ_{90}^* , K_D das Maximum der Kristallenergie, das bei einer Drehung der Magnetisierung in der Schichtebene überwunden werden muß. Daraus ergibt sich:

$$H_c \approx \frac{K_D^*}{I_s} + \frac{\gamma_{90}^* F}{I_s V} \quad (9)$$

Da die Bezirke sehr lang im Vergleich zu ihrer Breite d sind, ist:

$$\frac{F}{V} = \frac{2 l D}{d l D} = \frac{2}{D} \quad (10)$$

Damit wird aus Gl. 9:

$$H_c \approx \frac{K_b^*}{I_s} + \frac{\gamma_{90^\circ}^*}{I_s} \frac{2}{d}. \quad (11)$$

$\gamma_{90^\circ}^*$ ist durch Abb. 22 gegeben. Die Basisbreite d bekommt man durch Messung. Es ist

$$\text{für } D \approx 700 \text{ Å: } d \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

$$\text{für } D \approx 550 \text{ Å: } d \approx 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

und die Sättigungsmagnetisierung I_s ist etwa gleich der des kompakten Materials, wenn $D > 500 \text{ Å}$ ist.

Für die Abschätzung der Koerzitivkraft dünnster Schichten ($D < 100 \text{ Å}$) soll näherungsweise der Einfluß der Kristallenergie K_D vernachlässigt werden. Leider ist der Ablauf der Ummagnetisierung bei diesen Schichtdicken unbekannt. Nimmt man probeweise einen ähnlichen Verlauf wie bei der 550 Å dicken Schicht und ein mittleres konstantes d der Größenordnung 10^{-4} cm an, verwendet man weiter für I_s die von Reincke²²⁾ gemessenen Werte, so ergibt sich in Übereinstimmung mit dem Experiment ein Abfall von H_c nach kleineren

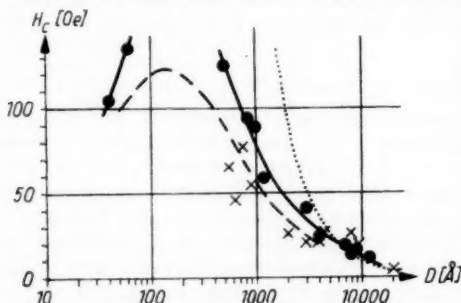


Abb. 27. Koerzitivkraft H_c als Funktion der Schichtdicke D . —●—●— nach Gl. (7) und (11) berechnete Werte, × gemessene Werte, — — — Kurve nach Reimer³¹⁾, Kurve nach Néel³²⁾

nach der angegebenen Methode erhalten worden sind (Kreuze). Weiter ist die Schichtdickenabhängigkeit von H_c einer von Reimer³¹⁾ vermessenen dünnen Eisenschicht, bei der die Koerzitivkraft nach Reimer durch die Kristallenergie gegeben sein soll (gestrichelte Kurve), und die nach einer von Néel³²⁾ angegebenen Beziehung, nach der H_c proportional $D^{-4/3}$ angesetzt wird (punktierter Kurve), eingezeichnet. Die Übereinstimmung ist, in Anbetracht der Näherungen und vereinfachten Modelle, befriedigend.

Die Richtung der 90°-Wände

Wie schon bemerkt, weicht die Richtung der 90°-Wände bei dünnen Schichten unter etwa 800 Å Dicke von der beim kompakten Material ab. Dieser Effekt soll hier näher untersucht werden.

³¹⁾ L. Reimer, Z. Naturforsch. **11a**, 649 (1956).

³²⁾ M. L. Néel, J. Phys. Radium **17**, 250 (1956).

1. Schichtdicke $D > 800 \text{ \AA}$. Bei der Ummagnetisierung entstehen Bezirke, die hauptsächlich durch 90° -Wände gebildet werden. Für die Richtung dieser Wände gibt es im allgemeinen zwei Möglichkeiten: Die Wände liegen parallel zur WLR .

2. Schichtdicke: $800 \text{ \AA} > D > 600 \text{ \AA}$. Die beim Ummagnetisieren entstehenden Keime werden von Wänden begrenzt, die nicht mehr einen Winkel von 45° mit den LR bilden. Die Wand stellt sich mehr in die Richtung der Magnetisierung des Keimes ein. Hierdurch entstehen vier mögliche Richtungen.

3. Schichtdicke $D < 600 \text{ \AA}$. Wenn die Schichtdicke weiter abnimmt, drehen sich die Wände immer mehr in die Richtung der Magnetisierung des Keimes. Hierdurch können je zwei der nach 2. möglichen vier Richtungen zusammenfallen.

Bildet beim Ummagnetisieren das äußere Feld den Winkel α_H mit einer WLR , so stellen sich je nach der Schichtdicke die 90° -Wände im allgemeinen in eine der unter 1. bis 3. möglichen Lagen ein.

Ist α_W der Winkel, den die Wand mit der WLR bildet, auf die auch α_H bezogen ist, so erhält man für eine 750 \AA bzw. 600 \AA dicke Schicht in Abb. 28 und 29 dargestellte Abhängigkeit. Bei der dünneren Schicht fallen je zwei der vier bei der dickeren Schicht möglichen Lagen schon wieder zusammen.

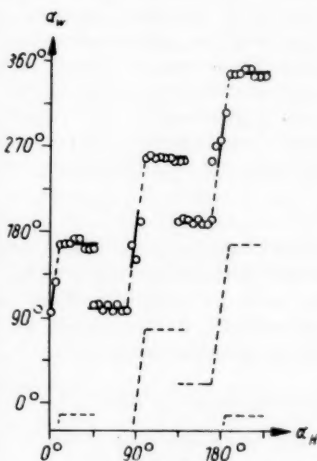


Abb. 28

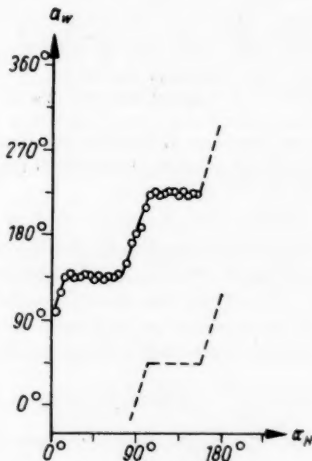


Abb. 29

Abb. 28 und 29. Wandrichtung α_W in Abhängigkeit von der Richtung eines ummagnetisierenden Feldes α_H . Abb. 28. bei einer 750 \AA , Abb. 29. bei einer 600 \AA dicken Schicht

Die Abweichung der Lage von 90° -Wänden, die bei der Ummagnetisierung dünner Schichten entstehen, von der beim kompakten Material, kann mit der Annahme erklärt werden, daß sich die Magnetisierung innerhalb der Wand nicht mehr exakt auf einem Kegelmantel von der einen Richtung zur anderen bewegt; vielmehr tritt eine Komponente auf, die sich in der Schichtebene dreht

und in der Wand magnetische Ladungen erzeugt. Zur Rechtfertigung dieser Vermutung, die durch die Untersuchungen von Néel²⁶⁾ nahegelegt wird, werden folgende Betrachtungen angestellt:

Zur Vereinfachung nehme man an, daß sich die Magnetisierung in der Schichtebene in gleichen Schritten von Atomlage zu Atomlage dreht und dabei magnetische Pole der Dichte

$$\rho_m(x) = I_s \cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{2\delta}x\right) \cdot \frac{\pi}{2\delta} \quad (12)$$

erzeugt. x habe die in Abb. 30 dargestellte Bedeutung, δ sei die Wanddicke und ϑ der Winkel zwischen Wand und einer LR . Damit ergibt sich der in

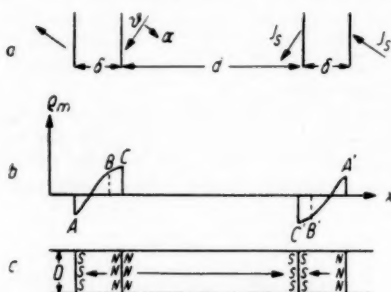


Abb. 30. Zur Deutung der Wandrichtung bei dünnsten Schichten ($D < 800 \text{ \AA}$)

das zwischen den Wänden entstehende Magnetfeld klein gegen das in der Wand — eine Bedingung, die hier erfüllt ist —, so ergibt sich die Entmagnetisierungsenergie E des Keimes zu:

$$E = E_w + E_K \quad (13)$$

E_w ist der Energieanteil, der durch das Feld innerhalb der Wand und E_K die Energie, die durch das entmagnetisierende Feld zwischen den Wänden entsteht. Berechnet man diese Energiebeiträge nach der bekannten Weise, wobei die Entmagnetisierungsfaktoren der Wand und des Keimes durch die entsprechender elliptischer Säulen angenähert werden, so erhält man:

$$E = 4\pi l \delta \frac{D^2}{\delta + D} I_s^2 (\cos^2 \vartheta - 2 \cos \vartheta + 1) + 2\pi l D^2 I_s^2 (1 - 2 \cos \vartheta \sin \vartheta). \quad (14)$$

Für das Minimum dieser Energie ergibt sich die Beziehung

$$\frac{2\delta}{\delta + D} = \frac{\cos 2\vartheta}{\sin \vartheta \cdot (1 - \cos \vartheta)}. \quad (15)$$

Mit $\vartheta = 90^\circ - \vartheta$ erhält man für eine 750 \AA dicke Schicht:

$$2\vartheta_{\text{berechnet}} = 100^\circ$$

in guter Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert:

$$2\vartheta_{\text{gemessen}} = 110^\circ.$$

Wie zu erwarten war, nimmt ϑ mit abnehmender Schichtdicke nach Gl. (15) auch ab. Allerdings ist für Schichtdicken $D < 600 \text{ \AA}$ die Übereinstimmung

nicht mehr so gut, wenn man mit den gemessenen Werten vergleicht. Das kann an einer Schichtdickenabhängigkeit der Kristallenergie liegen, die durch Gl. (14) nicht mit erfaßt wird.

Zusammenfassung

Nach einem kurzen, orientierenden Überblick über die in diesem Zusammenhang interessierenden wichtigsten Arbeiten werden die verwendeten experimentellen Hilfsmittel und Methoden beschrieben.

Im Hauptteil werden die Ergebnisse der Beobachtungen über die Bezirksstruktur beim Um- und Entmagnetisieren mitgeteilt und gedeutet. Die Eigenschaften der dicksten Schichten ($D \approx 10000 \text{ \AA}$) entsprechen etwa denen des kompakten Materials. Mit abnehmender Schichtdicke werden die 180° -Wände energetisch immer ungünstiger, bis von etwa 800 \AA an fast nur noch 90° -Wände existieren. Die Wände unterhalb dieser Schichtdicke haben eine vom kompakten Material abweichende Richtung. Die Ummagnetisierung bei diesen Schichtdicken erfolgt im wesentlichen durch Drehung, die bei den dünnsten Schichten mit noch nachweisbarer Bezirksstruktur (etwa 550 \AA) auch reversibel sein kann. Dem Verhalten beim Ummagnetisieren entsprechend, ergeben sich auch bei entmagnetisierten Schichten unterschiedliche Muster.

Die wichtigsten Erscheinungen konnten zufriedenstellend gedeutet werden. Es ergaben sich durch vereinfachende Modellvorstellungen interessante Erkenntnisse über Wandenergie, Wandrichtung, Koerzitivkraft und Kristallanisotropie. Auf Grund der Vorstellungen über den Ummagnetisierungsvorgang konnte die Größe der Koerzitivkraft in Abhängigkeit von der Schichtdicke abgeschätzt werden. Die anomale Wandrichtung bei dünnsten Schichten läßt sich mit der Néelschen Annahme, daß bei dünnsten Schichten die Magnetisierung in der Wand sich nicht aus der Schichtebene herausdreht, deuten.

Beobachtungen und Überlegungen legen eine Abhängigkeit der Kristallanisotropieenergie von der Schichtdicke nahe.

Herrn Prof. Dr. B. Elschner danke ich für wertvolle Anregungen und die stets hilfsbereite Unterstützung. Herrn Prof. Dr. W. Schütz danke ich für die Bereitstellung der Hilfsmittel seines Institutes und fördernde Diskussionen.

Jena, Physikalisches Institut der Friedrich-Schiller-Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 20. Juni 1960.

Die Winkelabhängigkeit der magnetfeldinduzierten Anisotropie im Eisen-Nickel-Ferrit-Einkristall

Von Rolf Wagner

Mit 8 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Behandelt man Ferritmaterialien bei höheren Temperaturen im Magnetfeld, dann erhält man unter gewissen Voraussetzungen eine Orientierungsüberstruktur, die zu einer einachsigen magnetischen Anisotropie führt. Diese Anisotropie war Gegenstand der vorliegenden Untersuchung an einem Fe-Ni-Ferrit-Einkristall. Zu dem Zweck wurde die Abhängigkeit des Drehmoments von der Richtung des bei der Glühung angelegten Magnetfeldes in der (100)-, (110)- und (111)-Ebene gemessen. Die experimentellen Ergebnisse werden mit entsprechenden Theorien von Néel, Taniguchi, Yamamoto und Iwata verglichen, die auf dem Modell der Pärchenbildung beruhen. Unter der Voraussetzung, daß dieses Modell zutrifft, kann gezeigt werden, daß sich die Pärchen beim vorliegenden Ferrit mit ihren magnetisch wirksamen Achsen ausschließlich in Richtung der Würfelkanten des kubischen Spinellgitters ausrichten.

1. Einführung

In verschiedenen magnetischen Materialien entsteht eine Orientierungsüberstruktur, wenn man sie im Magnetfeld glüht. Der Mechanismus dieser Überstrukturbildung ist noch umstritten. Es wird angenommen, daß im Kristallgitter zwischen den Atomen verschiedener Gitterplätze Bindungskräfte wirksam sind, die zur Pärchenbildung zwischen benachbarten Atomen führen. Normalerweise sind diese Pärchen isotrop verteilt. Beim Anlegen eines äußeren Magnetfeldes richten sie sich aus, sofern sie magnetisch beeinflusst werden können; es entsteht eine einachsige magnetische Anisotropie.

Orientierungsüberstrukturen wurden sowohl bei metallischen Legierungen als auch bei Ferriten beobachtet. Bei den Fe-Ni-Ferriten hat man verschiedene Überstrukturen festgestellt. So fanden Aiyama u. Mitarb.¹⁾ bei Untersuchungen im Temperaturbereich um 400 °C eine solche, die bei Zimmertemperatur stabil ist und bei der eine vorherige Oxydation notwendig scheint. Ob die dabei gebildeten Kationenleerstellen direkt oder nur indirekt am Aufbau der Pärchen beteiligt sind, ist nicht entschieden. Menyuk u. Mitarb.²⁾ beobachteten demgegenüber eine Überstruktur bei tiefen Temperaturen, die erst unter

¹⁾ Y. Aiyama, H. Sekizawa u. S. Iida, J. Physic. Soc. Japan **12**, 742 (1957).

²⁾ N. Menyuk u. K. Dwight, Physic. Rev. **112**, 397 (1958).

halb 10 °K stabil ist. Sie haben die Richtungsabhängigkeit des Effektes gemessen und gewisse Annahmen über die Zusammensetzung der Pärchen diskutiert. Im Gegensatz hierzu bestehen kaum begründete Vorstellungen über den Mechanismus des Effektes im Temperaturbereich um 400 °C. Einen diesbezüglichen Hinweis kann man erhalten, wenn man die bevorzugten Richtungen der magnetisch wirksamen Pärchenachsen im Kristallgitter kennt. Man kann dann auf die möglichen Gitterplätze der Pärchenpartner schließen. Um etwas über diese Richtungen zu erfahren, ist es zweckmäßig, wie Menyuk u. Mitarb., das Anisotropieverhalten von Einkristallen zu untersuchen. Im folgenden soll über Drehmomentmessungen berichtet werden, die wir an einem Fe-Ni-Ferrit-Einkristall vorgenommen haben.

2. Probenherstellung

Die untersuchte einkristalline Probe hatte die Ausgangszusammensetzung $\text{Fe}_{0,25}\text{Ni}_{0,75}\text{Fe}_2\text{O}_4$. Sie wurde mit Hilfe des Flammenschmelzverfahrens gewonnen und unmittelbar nach der Herstellung mit einer Geschwindigkeit von etwa 100°/h von 1200 °C bis auf Zimmertemperatur in Luft abgekühlt. Aus dem Einkristallrohling wurde eine Kugel herausgearbeitet und anschließend röntgenografisch orientiert.

3. Versuchsführung

Die Untersuchungen erfolgten in der (100)-, (110)- und (111)-Ebene des Einkristalls. Nach der Orientierung der jeweiligen Ebenen glühten wir die Probe eine halbe Stunde bei 300 °C in Luft und legten dabei ein Magnetfeld von etwa 5 kOe unter dem Winkel θ_T , bezogen auf eine ausgezeichnete Kristallachse an. Nach einer halben Stunde ist der Ordnungsvorgang im wesentlichen abgeschlossen. Um die Pärchenverteilung einzufrieren, wurde die Probe — immer noch im Magnetfeld — langsam bis auf Zimmertemperatur abgekühlt. Anschließend führten wir die Drehmomentmessung bei Zimmertemperatur durch. Dieser Behandlungszyklus wurde, mit jeweils anderem Winkel θ_T , mehrfach wiederholt.

4. Messungen in der (100)-Ebene

In der (100)-Ebene erhielten wir die in Abb. 1 gezeigten Drehmomentkurven, wenn wir das Magnetfeld bei der Glühbehandlung in den angegebenen Richtungen θ_T anlegten. Die Kurven entstehen durch eine Überlagerung der Kristallanisotropie und der induzierten einachsigen Anisotropie. Die Auswertung der Drehmomentkurven erfolgte durch harmonische Analyse und führte zu der Beziehung:

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = \left(-21,2 \cdot 10^3 \cdot \sin 4\varphi + \frac{K_{(100)}(\theta_T)}{\text{erg/cm}^3} \cdot \sin 2\varphi \right) \text{erg/cm}^3 \quad (1)$$

mit dem Parameter θ_T .

Der Zahlenwert $-21,2 \cdot 10^3 \text{ erg/cm}^3$ wurde durch Mittelung gewonnen; er ist mit einem mittleren Fehler von $\pm 0,2 \cdot 10^3 \text{ erg/cm}^3$ behaftet.

Das Glied mit $\sin 4\varphi$ ist auf die Kristallanisotropie zurückzuführen. Aus der Tatsache, daß der Faktor dieses Gliedes bei allen Glühungen innerhalb

der Fehlergrenze konstant blieb, kann geschlossen werden, daß die Kristallanisotropie durch die Magnetfeldglühbehandlung nicht beeinflußt wurde. Diese

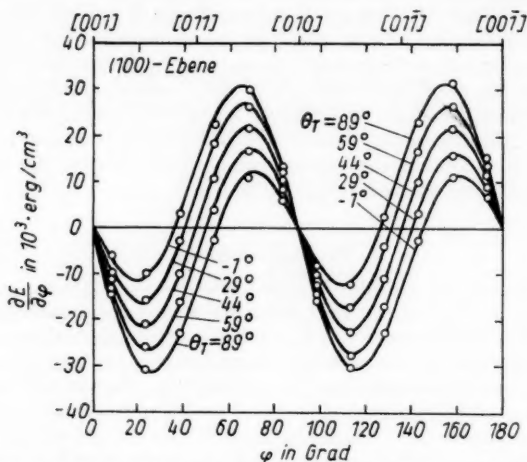


Abb. 1. Abhängigkeit der bei Zimmertemperatur in der (100)-Ebene eines Fe-Ni-Ferrit-Einkristalls gemessenen Drehmomentkurve von der Richtung θ_T des bei der Magnetfeldglühung angelegten Feldes. φ und θ_T wurden auf die [001]-Richtung bezogen. Glüh-temperatur: 300 °C, Glühdauer: $\frac{1}{2}$ Stunde, Feldstärke: 5 kOe

Annahme wird auch durch Drehmomentmessungen bestätigt, die wir nach zwischenzeitlich durchgeführten Glühungen ohne Magnetfeld vornahmen und bei denen der Zahlenfaktor der gleiche war.

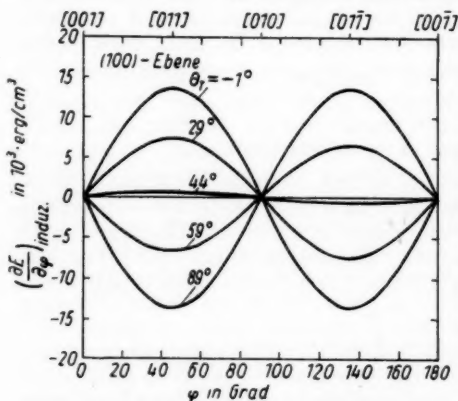


Abb. 2. Abhängigkeit des magnetfeldinduzierten Anteils $(\frac{\partial E}{\partial \varphi})_{induz.}$ der Kristallanisotropie von der Richtung θ_T des angelegten Magnetfeldes, gemessen in der (100)-Ebene

Da Ausscheidungen einer Phase mit anderen magnetischen Eigenschaften, wenn sie auftreten, beim vorliegenden Ferrit immer gerichtet sind, müssen sie sich als zusätzliche Glieder mit $\sin 2\varphi$ (gilt für nadel- oder plattenförmige Ausscheidungen) oder mit $\sin 4\varphi$ (gilt für gekreuzte Ausscheidungen) bei Messung unterhalb der magnetischen Sättigung in der Drehmomentkurve bemerkbar machen. Das gilt auch dann noch, wenn die Ausscheidungen im mikroskopischen Schlifffbild nicht mehr sichtbar sind. Solche Zusatzglieder wurden jedoch nicht beobachtet.

Die induzierte einachsige Anisotropie wird durch den Ausdruck $K_{(100)}(\theta_T) \cdot \sin 2\varphi$ beschrieben. Wenn man nur diesen Anteil des Drehmomentes aufträgt, erhält man Sinuskurven, die sich, je nach Wahl des Winkels θ_T , lediglich bezüglich der Größe und des Vorzeichens der Amplitude unterscheiden (Abb. 2). Die induzierte Vorzugsrichtung liegt immer in einer der beiden Würfelkantenrichtungen dieser Kristallebene. In keinem einzigen Fall konnten Zwischenrichtungen festgestellt werden.

Aus der Kurvenschar der Abb. 2 wurde der Betrag der Amplitude $K_{(100)}$ ermittelt und in Abb. 3 über θ_T aufgetragen (Meßpunkte). Der Magnetfeldeffekt hat ein Maximum, wenn das Feld in Würfelkantenrichtung angelegt wird; die einachsige Anisotropie verschwindet in der Würfel-flächendiagonale. Diese Beobachtung deutet darauf hin, daß sich die Pärchen mit ihren magnetisch wirksamen Achsen ausschließlich in Richtung der Würfelkanten ausrichten.

Setzt man in (1) für den Anteil der Kristallanisotropie: $-21,2 \cdot 10^3 \text{ erg/cm}^3 = K_1/2$, so erhält man für die Konstante K_1 den Wert:

$$K_1^{30^\circ\text{C}} = (-42,4 \pm 1,2) \cdot 10^3 \text{ erg/cm}^3$$

Dieser Wert ist nicht auf $1/H \rightarrow 0$ extrapoliert worden; er liegt deshalb, wie zu erwarten, etwas unter den Literaturwerten für Zimmertemperatur³⁾. Der angegebene Fehler setzt

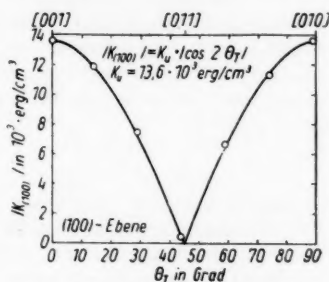


Abb. 3. Winkelabhängigkeit der Amplitude $K_{(100)}$ des Drehmomentes der induzierten Anisotropie in der (100)-Ebene

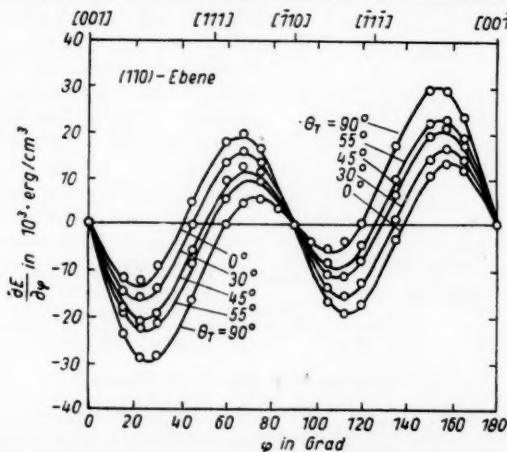


Abb. 4. Abhängigkeit der bei Zimmertemperatur in der (110)-Ebene eines Fe-Ni-Ferrit-Einkristalls gemessenen Drehmomentkurve von der Richtung θ_T des bei der Magnetfeldglühung angelegten Feldes. φ und θ_T wurden auf die [001]-Richtung bezogen. Glühtemperatur: 300°C , Glühdauer: $1/2$ Stunde, Feldstärke: 5 kOe

³⁾ W. A. Yager, J. K. Galt u. F. R. Merritt, Physic. Rev. **99**, 1203 (1955).

sich nur aus dem relativem Fehler des Mittelwertes und dem Orientierungsfehler zusammen. Temperaturmeßfehler wurden nicht berücksichtigt.

5. Messungen in der (110)-Ebene

Bei Messungen in der (110)-Ebene erhielten wir die in Abb. 4 gezeigte Drehmomentkurvenschar. Glieder mit $\sin 6\varphi$ wurden beobachtet, jedoch wegen ihrer geringen Amplitude, die im Größenordnungsbereich der Meßfehler lag, bei der Auswertung vernachlässigt. Mit Hilfe der harmonischen Analyse errechneten wir aus den Drehmomentkurven die Beziehung:

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = \left(-10,8 \cdot 10^3 \cdot \sin 2\varphi - 16,3 \cdot 10^3 \cdot \sin 4\varphi + \frac{K_{(110)}(\theta_T)}{\text{erg/cm}^3} \cdot \sin 2\varphi \right) \text{erg/cm}^3. \quad (2)$$

Die ersten beiden — konstanten — Terme beschreiben wiederum das Verhalten des Drehmomentes der Kristallanisotropie und der Term mit $K_{(110)}(\theta_T) \sin 2\varphi$ die Winkelabhängigkeit der induzierten einachsigen Anisotropie.

Aus den Drehmomentkurven wurde $K_{(110)}$ ermittelt und in Abb. 5 über θ_T aufgetragen (Meßpunkte). Auch in dieser Ebene hat der Magnetfeldeffekt in Richtung der Würfelkante ein Maximum.

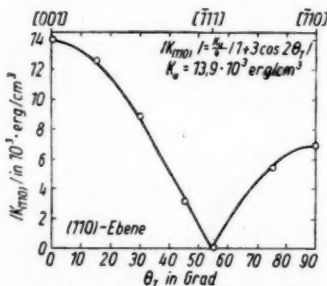


Abb. 5. Winkelabhängigkeit der Amplitude $K_{(110)}$ des Drehmoments der induzierten Anisotropie in der (110)-Ebene

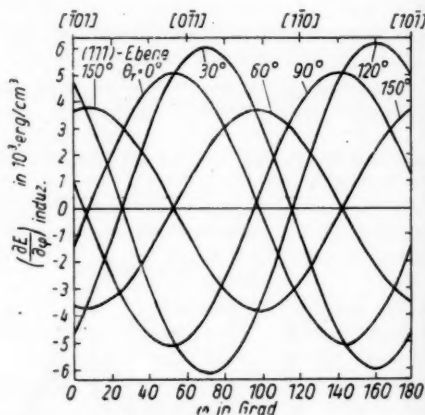


Abb. 6. Abhängigkeit des magnetfeldinduzierten Anteils $\left(\frac{\partial E}{\partial \varphi}\right)_{\text{induz.}}$ der Kristallanisotropie von der Richtung θ_T des angelegten Magnetfeldes, gemessen in der (111)-Ebene

6. Messungen in der (111)-Ebene

Die Drehmomentkurven, die wir in der (111)-Ebene erhalten haben, sind wegen der bekannten starken Anfälligkeit dieser Ebene gegenüber geringfügigen Orientierungsfehlern unübersichtlich. In der Abb. 6 haben wir deshalb nur den magnetisch induzierten Anteil des Drehmoments aufgetragen. Die harmonische Analyse ergab für diesen den formelmäßigen Ausdruck:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \varphi}\right)_{\text{induz.}} = K_{(111)}(\theta_T) \cdot \sin 2(\varphi - \theta_n) \quad (3)$$

Dabei ist $\theta_n = \theta_n(\theta_T)$ der Winkel der induzierten Vorzugsrichtung. Er wurde, ebenso wie φ und θ_T , auf die $[101]$ -Achse bezogen.

In Abb. 7 ist $K_{(111)}$ und in Abb. 8 θ_u über θ_T aufgetragen. Die (111) -Ebene zeigt ein grundsätzlich anderes Verhalten als die (100) - bzw. (110) -Ebene. Das ist auf die besondere Symmetrie dieser Ebene zurückzuführen.

Trotz der genannten Schwierigkeiten in der (111) -Ebene war die Meßgenauigkeit bezüglich der Glieder mit $\sin 6\varphi$ ausreichend, um die Konstante K_2 der Kristallanisotropie zu bestimmen. Aus 6 verschiedenen Drehmomentkurven wurde ein Wert von

$$K_2 = (-6,6 \pm 0,3) \cdot 10^3 \text{ erg/cm}^3$$

ermittelt.

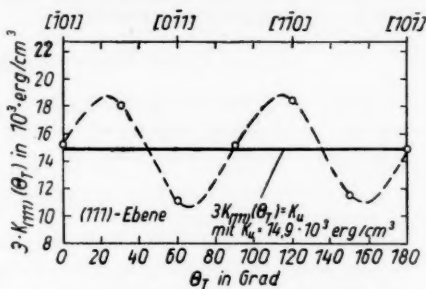


Abb. 7. Winkelabhängigkeit der Amplitude $K_{(111)}$ des Drehmoments der induzierten Anisotropie in der (111) -Ebene

7. Diskussion der Meßergebnisse

Die Meßergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen und deuten:

Die Winkelabhängigkeit der Amplitude der einachsigen Anisotropie in den untersuchten Ebenen deutet darauf hin, daß die magnetisch wirksamen Achsen der anisotropieerzeugenden Pärchen ausschließlich in Richtung der drei Würfelkanten des kubischen Spinellgitters liegen, und daß sich die zahlenmäßige Verteilung der Pärchen auf die drei verschiedenen Würfelkanten nach den Winkeln richtet, welche die spontane Magnetisierung mit den Würfelkanten einschließt.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß der experimentelle Befund in Übereinstimmung mit den Theorien von Néel, Taniguchi, Yamamoto und Iwata⁴⁾ steht, wenn man voraussetzt, daß sich die Pärchen nur in die Würfelkantenrichtungen einstellen.

Maßgebend für die Verteilung der Pärchen auf die drei Würfelkanten ist nach Néel die Wechselwirkungsenergie zwischen den Pärchen und der

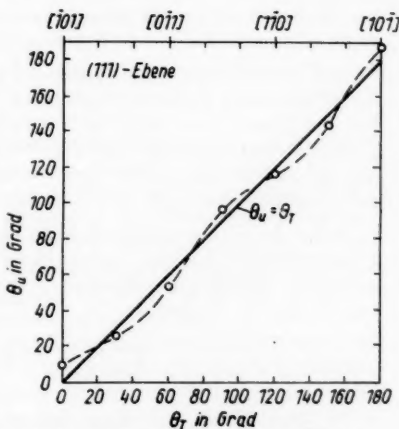


Abb. 8. Abhängigkeit der induzierten Vorzugsrichtung θ_u von der Richtung θ_T des angelegten Magnetfeldes in der (111) -Ebene

⁴⁾ L. Néel, J. phys. radium **15**, 225 (1954); S. Taniguchi u. M. Yamamoto, Sci. Rep. Tohoku Imp. Univ. Ritu A, **6**, 330 (1954); S. Taniguchi, Sci. Rep. Tohoku Imp. Univ. Ritu A, **7**, 269 (1955); S. Taniguchi, Sci. Rep. Tohoku Imp. Univ. Ritu A, **9**, 196 (1957); T. Iwata, Sci. Rep. Tohoku Imp. Univ. Ritu A, **10**, 34, (1958).

spontanen Magnetisierung. Man erhält für die Winkelabhängigkeit dieser Energie in erster Näherung einen Ausdruck, der sich additiv aus den Energieanteilen der in den drei einfach indizierten Kristallachsen ausgerichteten Pärchen zusammensetzt, nämlich:

$$E = -E_{[100]} \cdot N_{[100]} - E_{[010]} \cdot N_{[010]} - E_{[001]} \cdot N_{[001]}.$$

Dabei ist $E_{[xyz]}$ die Wechselwirkungsenergie eines einzelnen Pärchens, das sich auf der $[xyz]$ -Achse befindet und $N_{[xyz]}$ die Anzahl der auf dieser Achse befindlichen Pärchen. Das führt zu dem Ausdruck:

$$E = -K_u(\alpha'^2 \alpha'^2 + \beta'^2 \beta'^2 + \gamma'^2 \gamma'^2), \quad (4)$$

wobei die α' , β' und γ' die Richtungskosinus der spontanen Magnetisierung bei der Magnetfeldglühung und die α , β und γ diejenigen des Magnetfeldes bei der Messung sind.

Gleichung (4) ist ein Spezialfall des allgemeinen Ausdrucks:

$$E = C[F(\alpha^2 \alpha'^2 + \beta^2 \beta'^2 + \gamma^2 \gamma'^2) + G(\alpha\alpha' \beta\beta' + \alpha\alpha' \gamma\gamma' + \beta\beta' \gamma\gamma')],$$

wobei in dem Faktor C die Atomkonzentrationen, die Sättigungsmagnetisierung, die magnetische Wechselwirkungsenergie und die Glühtemperatur enthalten sind. F und G sind Größen, die nur von der Art der Gitterstruktur abhängen. Beim kubisch raumzentrierten Gitter ist $F = 0$, beim kubisch flächenzentrierten Gitter ist $F/G = 1/4$ und beim primitiv kubischen Gitter ist $G = 0$. Die Pärchen ordnen sich also im Spinellgitter des vorliegenden Fe—Ni-Ferrits so an, als wäre es primitiv kubisch strukturiert. Das gilt jedoch nicht allgemein für jeden Ferrit, so z. B. nicht für den Fe—Co-Ferrit⁵⁾.

Bei Abwesenheit eines äußeren Feldes liegt die spontane Magnetisierung der Weisschen Bezirke immer in den leichtesten Richtungen, beim vorliegenden Fe—Ni-Ferrit in einer der vier möglichen $[111]$ -Kristallachsen. Da diese Achsen symmetrisch zu den drei Würfelkanten liegen, folgt eine Gleichverteilung der Pärchen auf die drei Würfelkanten; die Wirkung der Pärchen hebt sich insgesamt auf und die einachsige Anisotropie verschwindet.

Beim Anlegen eines ausreichend starken äußeren Feldes wird die spontane Magnetisierung der Weißchen Bezirke in Richtung des äußeren Feldes ausgerichtet. Für die (100)-Ebene errechnet sich dann das induzierte Drehmoment aus (4) zu: (s. Anhang)

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \varphi}\right)_{\text{induz.}} = K_{(100)}(\theta_T) \cdot \sin 2\varphi$$

mit

$$K_{(100)}(\theta_T) = K_u \cdot \cos 2\theta_T. \quad (5)$$

θ_T und φ sind dabei auf die $[001]$ -Achse bezogen.

Die in Abb. 3 eingezeichnete Kurve wurde gemäß der Beziehung (5) errechnet. Die Meßpunkte decken sich gut mit der theoretischen Kurve. Wir

⁵⁾ S. Iida, M. Sekizawa u. Y. Aiyama, J. Physic. Soc. Japan **13**, 58 (1958); R. F. Penoyer u. L. R. Bickford, Physic. Rev. **108**, 271 (1957).

haben die Konstante K_u den experimentellen Werten angepaßt und erhielten für sie den Wert: $13,6 \cdot 10^3 \text{ erg/cm}^3$.

Der aus (4) errechnete Verlauf des Drehmoments in der (110)-Ebene genügt der Beziehung:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \varphi}\right)_{\text{induz.}} = K_{(110)}(\theta_T) \cdot \sin 2\varphi$$

mit der Amplitude:

$$K_{(110)}(\theta_T) = \frac{K_u}{4} (1 + 3 \cos 2\theta_T). \quad (6)$$

Die Winkel θ_T und φ wurden wiederum auf die [001]-Achse bezogen. Der Kurvenverlauf (6) ist in Abb. 5 eingezeichnet. Auch in dieser Ebene liegen die Meßwerte mit befriedigender Genauigkeit auf der theoretisch errechneten Kurve. K_u wurde wiederum den experimentellen Werten angepaßt; dabei erhielten wir für K_u einen Wert von $13,9 \cdot 10^3 \text{ erg/cm}^3$.

In der (111)-Ebene ist nach (4) ein Drehmomentverhalten gemäß der Beziehung:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \varphi}\right)_{\text{induz.}} = \frac{K_u}{3} \cdot \sin 2(\varphi - \theta_T) \quad (7)$$

zu erwarten. Leider ist die Übereinstimmung der experimentellen Ergebnisse mit der theoretisch errechneten Winkelabhängigkeit nicht so gut, wie in den anderen Ebenen. Die Meßpunkte in den Abb. 7 und 8 zeigen eine Periodizität mit $\sin 4\theta_T$ und weichen z. T. erheblich von den eingezeichneten Kurven ab, die der Beziehung (7) genügen. Dieser Sachverhalt ist auf Orientierungsfehler zurückzuführen. Diese entstehen durch röntgenografische Fehlorientierung und vor allem durch geringfügige Verdrehungen, die bei der Übertragung der Probe aus dem Röntgengoniometer in die Halterung des Anisotropiemessers unbeabsichtigt auftreten, sowie durch Unsymmetrien im Anisotropiemesser selbst. Wir haben rechnerisch nachgeprüft, daß schon Winkelabweichungen von wenigen Graden gegenüber der idealen Orientierung genügen, um den beobachteten Gang von $K_{(111)}(\theta_T)$ und $\theta_u(\theta_T)$ zu erklären.

Unter der Voraussetzung, daß die Orientierungsüberstruktur auf Pärchenbildung beruht, kann also gezeigt werden, daß die Messungen durch das angenommene Modell der Pärchenverteilung auf die drei Würfelkanten des kubischen Spinellgitters erklärt werden können. Jede andere Anordnung und Verteilung der Pärchen führt zu Formeln, die in Widerspruch zu den Experimenten stehen. Eine Aussage über den atomaren Charakter der Pärchen ist aber an Hand der vorliegenden Messungen allein noch nicht möglich, jedoch wird die Vielzahl der Möglichkeiten erheblich eingeschränkt.

Obwohl unsere Messungen in der (100)-Ebene mit den Ergebnissen von Menyuk u. Mitarb. übereinstimmen, glauben wir nicht, daß deren Modell auf unsere Ergebnisse anwendbar ist. Die Genannten nehmen an, daß der Anisotropieeffekt, den sie bei tiefen Temperaturen beobachtet haben, durch Elektronenaustausch zwischen 2- und 3wertigen Eisenionen zustande kommt. Dafür spricht auch die Tatsache, daß sie Proben verwenden, die einen Überschuß an 2wertigen Eisenionen enthalten. Demgegenüber erweist es sich im Überstrukturbereich um 400°C als notwendig, die Proben oxydierend zu behandeln¹⁾. Dabei nimmt der Anteil der Fe^{2+} -Ionen und damit die Wahrscheinlichkeit des Elektronenaustausches zwischen 2- und 3wertigen Fe-Ionen ab. Beide Effekte beruhen also offensichtlich auf verschiedenen Ursachen.

Anhang

Das Drehmoment $\frac{\partial E}{\partial \varphi}$ errechnet sich aus (4) zu:

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = -K_u \left(\alpha'^2 \frac{\partial \alpha^2}{\partial \varphi} + \beta'^2 \frac{\partial \beta^2}{\partial \varphi} + \gamma'^2 \frac{\partial \gamma^2}{\partial \varphi} \right). \quad (8)$$

Experimentell wird $\frac{\partial E}{\partial \varphi}$ in einer bestimmten Ebene als Funktion von φ und θ_T gemessen, wobei φ und θ_T auf eine ausgezeichnete Richtung in dieser Ebene bezogen werden. Es werden also für die $\alpha'^2, \beta'^2, \gamma'^2, \frac{\partial \alpha^2}{\partial \varphi}, \frac{\partial \beta^2}{\partial \varphi}$ und $\frac{\partial \gamma^2}{\partial \varphi}$ Ausdrücke gesucht, die ihre Abhängigkeit von φ und θ_T beschreiben. Als Parameter müssen darin außerdem noch Angaben über die Ebene und über die Bezugsrichtung enthalten sein.

Bezeichnet man die Richtungskosinus des Normalenvektors einer beliebigen Ebene mit $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ und diejenigen einer ausgezeichneten Richtung in dieser Ebene mit $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0$, dann gilt:

$$\alpha \alpha_0 + \beta \beta_0 + \gamma \gamma_0 = 0 \quad (\text{Meßrichtung} \perp \text{a. d. Ebenennormale}) \quad (a)$$

$$\alpha' \alpha_0 + \beta' \beta_0 + \gamma' \gamma_0 = 0 \quad (\text{Glührichtung} \perp \text{a. d. Ebenennormale}) \quad (b)$$

$$\alpha \alpha^0 + \beta \beta^0 + \gamma \gamma^0 = \cos \varphi \quad (\varphi \text{ zw. Meß- und Bezugsrichtung}) \quad (c)$$

$$\alpha' \alpha^0 + \beta' \beta^0 + \gamma' \gamma^0 = \cos \theta_T \quad (\theta_T \text{ zw. Glüh- und Bezugsrichtung}) \quad (d)$$

$$\text{sowie: } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (e)$$

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \quad (f)$$

Aus den Gl. (a–f) erhält man:

$$\alpha^2 = \frac{1 - \alpha_0^2}{2} - \frac{1 - \alpha_0^2 - 2\alpha^{02}}{2} \cdot \cos 2\varphi + \alpha^0(\beta^0\gamma_0 - \beta_0\gamma^0) \cdot \sin 2\varphi$$

$$\beta^2 = \frac{1 - \beta_0^2}{2} - \frac{1 - \beta_0^2 - 2\beta^{02}}{2} \cdot \cos 2\varphi + \beta^0(\alpha_0\gamma^0 - \alpha^0\gamma_0) \cdot \sin 2\varphi$$

$$\gamma^2 = \frac{1 - \gamma_0^2}{2} - \frac{1 - \gamma_0^2 - 2\gamma^{02}}{2} \cdot \cos 2\varphi + \gamma^0(\alpha^0\beta_0 - \alpha_0\beta^0) \cdot \sin 2\varphi$$

$$\alpha'^2 = \frac{1 - \alpha_0^2}{2} - \frac{1 - \alpha_0^2 - 2\alpha^{02}}{2} \cdot \cos 2\theta_T + \alpha^0(\beta^0\gamma_0 - \beta_0\gamma^0) \cdot \sin 2\theta_T$$

$$\beta'^2 = \frac{1 - \beta_0^2}{2} - \frac{1 - \beta_0^2 - 2\beta^{02}}{2} \cdot \cos 2\theta_T + \beta^0(\alpha_0\gamma^0 - \alpha^0\gamma_0) \cdot \sin 2\theta_T$$

$$\gamma'^2 = \frac{1 - \gamma_0^2}{2} - \frac{1 - \gamma_0^2 - 2\gamma^{02}}{2} \cdot \cos 2\theta_T + \gamma^0(\alpha^0\beta_0 - \alpha_0\beta^0) \cdot \sin 2\theta_T$$

$$\frac{\partial \alpha^2}{\partial \varphi} = (1 - \alpha_0^2 - 2\alpha^{02}) \cdot \sin 2\varphi + 2\alpha^0(\beta^0\gamma_0 - \beta_0\gamma^0) \cdot \cos 2\varphi$$

$$\frac{\partial \beta^2}{\partial \varphi} = (1 - \beta_0^2 - 2\beta^{02}) \cdot \sin 2\varphi + 2\beta^0(\alpha_0\gamma^0 - \alpha^0\gamma_0) \cdot \cos 2\varphi$$

$$\frac{\partial \gamma^2}{\partial \varphi} = (1 - \gamma_0^2 - 2\gamma^{02}) \cdot \sin 2\varphi + 2\gamma^0(\alpha^0\beta_0 - \alpha_0\beta^0) \cdot \cos 2\varphi.$$

Setzt man diese Beziehungen in (8) ein, dann erhält man einen allgemeinen Ausdruck für $\frac{\partial E}{\partial \varphi} = f(\varphi, \theta_T, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha^0, \beta^0, \gamma^0)$ mit dem die Spezialfälle errechnet wurden.

Ich danke Herrn Dr. R. Perthel für viele anregende Diskussionen. Herrn Dipl.-Phys. G. Elbinger möchte ich für die Überlassung der einkristallinen Probe und Fr. I. Fink für die Orientierung der Probe danken.

Jena, Institut für Magnetische Werkstoffe der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bei der Redaktion eingegangen am 9. Juli 1960.

Die Verwendbarkeit des Farbfilmes für quantitative mehrdimensionale Farbschlierenverfahren¹⁾

Von Gerhard Heyl

Mit 11 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Die quantitative Auswertung mehrdimensionaler Farbschlierenverfahren kann nach dem Testplatten- und dem Komponentenverfahren mit Hilfe des Farbfilms durchgeführt werden. Es werden Methoden zur Herstellung gesättigter und ungesättigter Normalfarben beschrieben, die den Bau von Normalfarbentestplatten ermöglichen.

Bei dem Komponentenverfahren wird der Farbfilm als Basis aufgefaßt, die jede Normalfarbe eindeutig durch drei Komponenten festlegt. Die Bedeutung der Basis und der Komponenten wird geklärt. Es wird angegeben, wie die Komponenten von Normalfarben in bezug auf den Farbfilm als Basis gemessen werden können. Die zur Berechnung der Normalfarbendaten aus den Komponenten erforderlichen charakteristischen Zahlen z_k und die Normierungsintegrale q_k werden für die Agfacolor-Filme Positiv S und CN 17 gemessen, die dabei auftretenden Fehlerquellen und Größen werden diskutiert, und die Farbfilmtypen untereinander und mit dem Auge und einer Photoelementbasis verglichen. Abschließend wird an einem einfachen Beispiel das Komponentenverfahren durchgeführt.

1. Einleitung

Eine photographische Schwarzweiß-Aufnahme ordnet jedem Bildpunkt (x, y) die von der auffallenden Strahlung bestimmte Schwärzung $S(x, y)$ der Schicht zu, stellt also ein skalares Feld dar. In der Dreischichten-Farbenphotographie werden jedem Bildpunkt (x, y) die Farbdichten $d_k(x, y)$, $k = 1, 2, 3$ zugeordnet, die von der spektralen Verteilung der auffallenden Strahlung bestimmt sind. Jede Farbaufnahme stellt demnach ein dreidimensionales Feld $v(x, y)$ dar und enthält einen größeren Informationsinhalt als eine Schwarzweiß-Aufnahme. Diese erweiterten Möglichkeiten des Farbfilmes können für physikalische Messungen nutzbar gemacht werden, falls eine Zuordnung zwischen spektralen Energieverteilungen (Farben) und physikalischen Größen möglich ist.

Beispiele hierfür sind die Farbschlierenverfahren nach Wolter²⁾. Ist der Farbfilm eine ausreichende Basis im Sinne von Wolter³⁾, dann können bei

¹⁾ Auszug aus der Dissertation des Verfassers; Institut für Angewandte Physik der Universität Marburg.

²⁾ H. Wolter, Ann. Physik (6) 8, 1 (1950).

³⁾ H. Wolter, Ann. Physik (6) 17, 329 (1956).

Verwendung von Normalfarben⁴⁾ zweidimensionale Farbschlierenverfahren nach drei Methoden quantitativ ausgewertet werden.

1. Vergleichsverfahren. Neben dem zu untersuchenden Objekt wird ein Testobjekt mit bekannten Ablenkungen aufgenommen. Ein Beispiel hierzu hat U. Schmidt⁵⁾ gegeben.

2. Testplattenverfahren. An die Stelle des Testobjektes tritt eine Normalfarbentestplatte, mit der die Normalfarben in ausreichend kleinen Farbton- und Sättigungsstufen dargestellt werden können.

3. Komponentenverfahren. Mit Hilfe einiger Kenngrößen des Farbfilms und durch spektralphotometrische Messungen können die Komponenten der Normalfarben in bezug auf den Farbfilm als Basis und die Normalfarbendaten selbst bestimmt werden. Dieser Weg gibt Auskunft über die Eignung des Farbfilms für Meßzwecke. Er liefert Gesichtspunkte für die Wahl unter dem verfügbaren Aufnahmematerial und läßt die Meßgenauigkeit erkennen.

Im folgenden werden zunächst Herstellungsmethoden für Testplatten beschrieben. Dann wird der Farbfilm als Basis für Normalfarben untersucht und abschließend an einem Beispiel das Komponentenverfahren durchgeführt.

2. Normalfarbentestplatten

2.1 Erzeugung gesättigter Normalfarben

Durchsetzt ein Parallelstrahlbündel eine Kombination aus einem Polarisator, einer senkrecht zur optischen Achse geschnittenen Quarzplatte und einem Analysator, so erhält man eine gesättigte Normalfarbe⁴⁾, deren Farbton μ durch den Winkel zwischen den Polarisationsrichtungen bestimmt ist.

Bei einer Schlierenplatte, die auch als Testplatte verwendbar sein soll, muß der Polarisator eine ortsabhängige Polarisationsrichtung in der Art haben, daß auf jedem Radiusvektor mit dem Winkel α gegen eine Nullstellung die Polarisationsrichtung gegen den Radiusvektor um $\frac{\alpha}{2}$ gedreht ist. Nach einem

Vorschlag von Wolter⁴⁾ kann das erreicht werden, wenn eine halbkreisförmige Polarisationsfolie zu einem Kegel mit dem Öffnungswinkel $\pi/3$ gerollt wird.

Die Herstellung eines solchen Kegels bereitet technische Schwierigkeiten. Eine auf diese Weise hergestellte Schlierenplatte⁵⁾ hat sich bei qualitativen Farbschlierenaufnahmen bewährt, erfüllte jedoch nicht die an eine Testplatte zu stellenden Genauigkeitsforderungen.

Ein kontinuierlicher Farbenkreis läßt sich durch eine, mit hoher Drehzahl rotierende Scheibe erzeugen, in die eine sektorförmige Polarisationsfolie eingesetzt wird. Diese Scheibe tritt an die Stelle des Polarisators. Bei einer Umdrehung der Scheibe wird der Farbenkreis zweimal durchlaufen, so daß diese Anordnung nicht als Schlierenplatte verwendbar ist. Nachteilig ist außerdem die Intermittenz der Belichtung, deren Einfluß schwer zu überschauen ist.

Für die Untersuchung der Farbfilmeigenschaften ist eine diskontinuierliche Platte wegen der leichteren Ausmessung geeigneter. U. Schmidt⁵⁾ hat eine Platte beschrieben, bei der 18 sektorförmige Polarisationsfolien zu einem

⁴⁾ H. Wolter, Ann. Physik (6) 8, 12 (1950).

⁵⁾ U. Schmidt, Ann. Physik (7) 1, 203 (1958).

⁶⁾ Herrn E. Käsemann danke ich für die Überlassung unverglaster Polarisationsfolie.

Kreis zusammengefügt und zwischen Glasplatten verkittet werden. Nach einer ähnlichen Methode wurde eine 12teilige Sektorplatte hergestellt, die als Schlierenplatte und als Testplatte mit 12 gleichabständigen, gesättigten Normalfarben diente. Durch die Verkleinerung der Sektorenzahl konnte ohne Nachteil die umfangreiche Meß- und Auswertarbeit erheblich verringert werden.

2.2 Erzeugung ungesättigter Normalfarben

Bei Verwendung eines rotierenden Sektors mit nicht sehr kleinem Winkel α entsteht längs eines Radiusvektors in Bilde durch Mischung eine ungesättigte Normalfarbe der Sättigung $B = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha$, wenn α der Sektorwinkel im Bogenmaß ist. Für die Anwendung ist hierbei ungünstig, daß mit dem Winkel auch die Beleuchtungsstärke oder die Belichtungszeit entsprechend geändert werden müssen, wenn man ungesättigte Farben gleichen Mittelwertes erhalten will.

Geeigneter ist die Mischung komplementärer Normalfarben. Man erhält eine farbtoukonstante Sättigungsreihe mit $B = (\varrho_1 - \varrho_2) B_1$, wenn man komplementäre Normalfarben gleicher Sättigung B_1 mit den Gewichten ϱ_1 und ϱ_2 mischt. Dies läßt sich verwirklichen, indem die komplementäre Farbe durch Drehung des Analysators um $\pi/2$ erzeugt und der Film doppelt belichtet wird. Die verschiedenen Gewichte werden bei gleicher Beleuchtungsstärke durch die Belichtungszeit oder besser bei konstanten Belichtungszeiten durch Abblenden des abbildenden Objektives erzeugt.

Auch mit der rotierenden Scheibe kann eine Sättigungsreihe hergestellt werden. Man setzt zwei senkrecht zueinander polarisierende Folien ein. Mittels zweier geeigneter, auf die Scheibe geschraubter Deckscheiben können die komplementären Farben gleicher Sättigung in verschiedenem Verhältnis gemischt werden.

Neben der Farbenmischung ist die Verwendung von elliptisch polarisiertem Licht besonders geeignet, wozu zwischen Polarisator und Quarz eine achromatische $\lambda/4$ -Platte eingeschoben wird. Ist φ der Winkel zwischen der Polarisationsrichtung und einer der beiden Hauptschwingungsrichtungen, dann beträgt die Sättigung $B = \cos 2\varphi$. Als achromatische $\lambda/4$ -Platte hat sich am besten das Fresnelsche Parallel-epiped⁷⁾ bewährt.

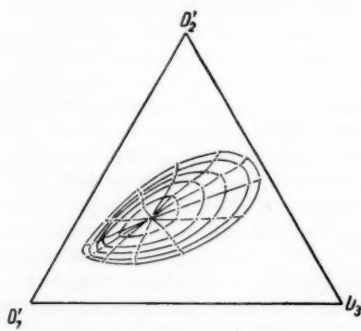


Abb. 1. Darstellung einer vollständigen Testplattenaufnahme durch die normierten Gesamtdichten D_i im Farbdreieck. Positivfilm S, 6 mm Quarzdicke

2.3 Die Auswertung von Testplattenaufnahmen

Kontinuierliche und stufenförmige Testplatten können also auf verschiedene Weise hergestellt werden. Zur quantitativen Auswertung werden von den Aufnahmen die Farbdichten D_1 , D_2 , D_3 bei drei Wellenlängen gemessen. Durch diese Gesamtdichten lassen

⁷⁾ Handb. Physik XXIV, 396 (1956).

sich die Normalfarben eindeutig kennzeichnen, nach Normierung in einem Farbdreieck darstellen und für die Bestimmung der Normalfarben von Objektaufnahmen verwenden.

Die Abb. 1 stellt als Beispiel die Normalfarben des Quarzsystems (Dicke 6 mm) in Sättigungsstufen von 0,2 bei einer Verteilungstemperatur der Lichtquelle von 2360 °K auf Agfa Positivfilm dar. Die Sättigungsstufen wurden durch Doppelbelichtung und Abblendung des Objektives erzeugt. Testplatten- und Objektaufnahmen müssen unter gleichen Bedingungen, insbesondere bezüglich Energieverteilung, Beleuchtungsstärke und Belichtungszeit, hergestellt werden.

3. Der Farbfilm als Basis für Normalfarben

3.1 Komponenten und Basisfunktionen beim Farbfilm

Es seien $b_k^*(\lambda)$ die spektralen, relativen Empfindlichkeiten des Aufnahmematerials in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ . Die Basisfunktionen⁴⁾ $b_k(\nu)$ erhält man durch Übergang zu der gewählten Grundvariablen $\nu(\lambda)$, wobei Monotonie von $\nu(\lambda)$ vorausgesetzt wird. Nach dem photographischen Summengesetz wirkt auf die k -te Schicht der Lichtstrom

$$L_k = \int f(\nu) b_k(\nu) d\nu, \quad (3.1)$$

wenn $f(\nu)$ die relative spektrale Energieverteilung der Beleuchtung (Farbe) ist. Die Komponente x_k ist demnach das in der Photographie Belichtung genannte Produkt aus Beleuchtungsstärke und Belichtungszeit.

Die Komponenten können nach H. Frieser und R. Reuther⁸⁾ aus den allein meßbaren Gesamtdichten berechnet werden. Mit der Extinktion $\varepsilon_k(\lambda)$ des Farbstoffes der Konzentration $c_k(x_k) = 1$ ist die Farbdichte in der k -ten Schicht

$$d_k(\lambda, x_k) = c_k(x_k) \cdot \varepsilon_k(\lambda). \quad (3.2)$$

Die Gesamtdichte D beträgt

$$D(\lambda, x_k) = \sum_k d_k(\lambda, x_k). \quad (3.3)$$

Von der Form der Farbdichtekurven $d_k(\lambda, x_k)$, also von dem Zusammenhang zwischen Farbdichte und Belichtung, wird im wesentlichen nur Unabhängigkeit von der Wellenlänge der belichtenden Strahlung gefordert. Wählt man zur Messung drei Wellenlängen λ_i , dann gilt mit $\varepsilon_{ki} = \varepsilon_k(\lambda_i)$ für die Dichte d_k bei der Wellenlänge λ_k

$$d_k = c_k(x_k) \cdot \varepsilon_{ki}. \quad (3.4)$$

Eine naheliegende Normierung der Konzentrationen macht die Einzelschichtdichten d_k und die Konzentrationen $c_k(x_k)$ zahlenmäßig gleich; die ε_{ki} werden gleich eins. Für die Gesamtdichte D_i bei der Wellenlänge λ_i erhält man

$$D_i = \sum_k d_k \varepsilon_{ki}, \quad \varepsilon_{ki} = 1; \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Die Dichten der einzelnen Schichten lassen sich demnach bei bekannter Extinktionsmatrix $\mathfrak{E} = (\varepsilon_{ki})$ durch Messung der Gesamtdichten bei drei Wellen-

⁸⁾ H. Frieser u. E. Reuther, Z. techn. Physik 19, 77 (1938).

längen und Auflösung des Gleichungssystems (3.5) bestimmen. Zur Bestimmung der Komponenten selbst ist die Kenntnis der Farbdichtekurven $d_k = d_k(x_k)$ erforderlich.

Die Dichten D_i wurden in einem Drei-Filter-Densitometer mit Interferenzfiltern für die Wellenlängen 644, 546 und 436 m μ gegen ein unbelichtetes Stück des zu messenden Filmes zur Elimination des Schleiers gemessen.

Bei speziellen Farbdichtekurven kann das Auswerteverfahren einfacher werden. Haben die Farbdichtekurven die Form $d_k = A_k \exp(\gamma_k \ln x_k)$ mit $\gamma_k = 1$, dann sind die Komponenten den Einzelschichtdichten proportional. In diesem Fall liefert bereits die Farbenkreisdarstellung durch Normierung der Gesamtdichten eine Ellipse, was beim Positiv-Film nach Abb. 2 durchaus näherungsweise eintreten kann.

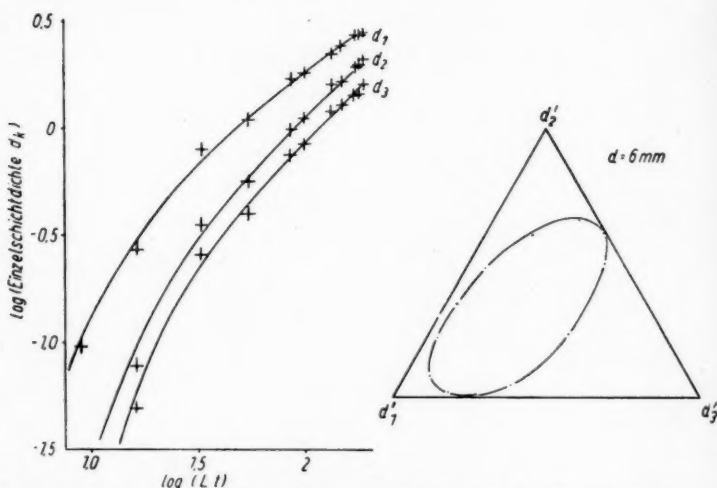


Abb. 2. Darstellung des Normalfarbenkreises durch die normierten Einzelschichtdichten p'_k bei spezieller Form der Farbdichtekurven (Positivfilm S, Verteilungstemperatur 2360 °C)

3.2 Die Messung der Extinktionsmatrix und der Farbdichtekurven

Eine meßtechnische Verwendung des Farbfilms setzt voraus, daß alle erforderlichen Daten vom Verarbeiter selbst am vorliegenden Material gewonnen werden können. Ein Rückgriff auf fremde Angaben ist häufig unmöglich oder Quelle zusätzlicher Fehler. Die folgenden Untersuchungen wurden an dem handelsüblichen Negativ-Positiv-Material der Agfa AG., Leverkusen, unternommen (Positivfilm S, Negativ CN 17)⁹⁾. Spezielle Maßnahmen bei der Entwicklung wurden nicht getroffen, sondern lediglich die Verarbeitungsvorschriften streng beachtet.

⁹⁾ Herrn Dr. Kraus, Farbenfabriken Bayer AG., danke ich für die Entwicklung der Filme.

Zur Messung der Extinktionsmatrix muß der zu untersuchende Film so belichtet werden, daß nur für eine Schicht die Belichtung den Schwellenwert überschreitet. Hierfür wurde der Film hinter geeigneten Interferenzfiltern belichtet, wobei unmittelbar vor der Filmebene in der Kamera ein einfacher Graukeil lag. (Der Graukeil braucht weder streng neutral zu sein noch eine konstante oder auch nur bekannte Stufenhöhe zu haben.) Die einzelnen Felder der Aufnahmen wurden vermessen und die Nebendarbdichten $c_k \cdot \epsilon_{ki}$, $i \neq k$, über der Hauptfarbdichte $d_k = c_k \epsilon_{kk}$ aufgetragen. Abb. 3 zeigt als Beispiel Messungen am Positivfilm für je zwei Interferenzfilter und bestätigt die Gültigkeit des Beerschen Gesetzes. Der steilere Anstieg bei größeren Hauptfarbdichten tritt ein, wenn in mehr als einer Schicht der Schwellenwert überschritten oder aus anderen Gründen Farbstoff entwickelt wird. Für den Positivfilm erhält man die Extinktionsmatrix:

$$\mathfrak{E}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0,159 & 0,006 \\ 0,198 & 1 & 0,095 \\ 0,057 & 0,365 & 1 \end{pmatrix}$$

Blaugrün Purpur Gelb,

wobei zur Veranschaulichung die Zuordnung zu den Schichtfarbstoffen kenntlich gemacht wurde.

Während beim Positivfilm die Empfindlichkeitsbereiche den Absorptionsmaxima der Negativfarbstoffe angepaßt und weitgehend getrennt sind¹⁰⁾, wird beim Negativfilm wegen der stärkeren Überlappung schon früher für eine zweite Schicht der Schwellenwert überschritten. Dies bewirkt eine geringere Meßgenauigkeit, die noch durch die flacheren Farbdichtekurven und den ungünstigeren Schleier weiter eingeschränkt wird. Der Schleier kann beim Kopierprozeß leicht weggefiltert werden, beeinflusst aber bei der Messung das Bezugsniveau.

¹⁰⁾ Darstellungen des Agfacolor-Verfahrens bei H. Berger, Agfacolor, Wuppertal (1954); W. Schultze, Farbenphotographie und Farbenfilm, Berlin (1953).

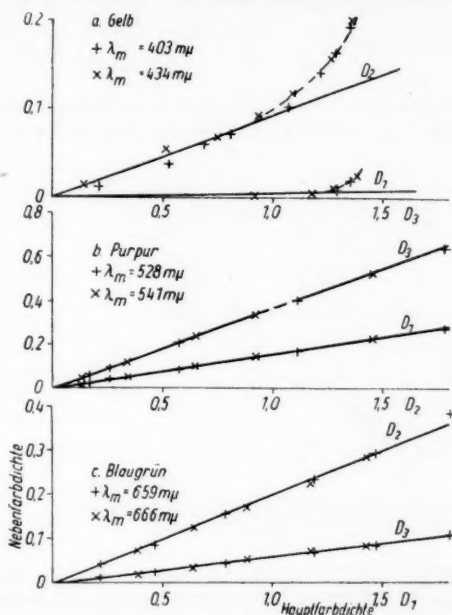


Abb. 3. Nebendarbdichten der Positivfarbstoffe. λ_m Durchlässigkeitsmaximum der Interferenzfilter

Nach der für den Negativfilm gemessenen Extinktionsmatrix

$$\mathfrak{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0,18 & 0,01 \\ 0,12 & 1 & 0,10 \\ 0,18 & 0,37 & 1 \end{pmatrix}$$

sind wesentliche Änderungen beim blaugrünen Farbstoff eingetreten (Abb. 4). Die an selektiv belichteten Aufnahmen

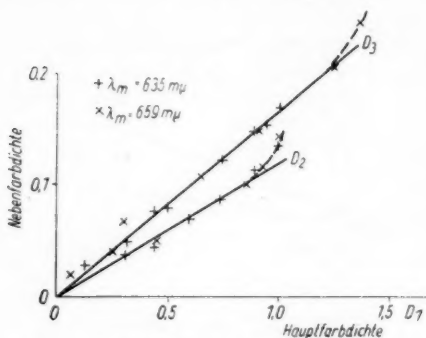


Abb. 4. Nebenfarbdichte des blaugrünen Negativfarbstoffes

gemessenen spektralen Farbdichten zeigen, daß das Absorptionsmaximum der Eigenart des Agfa-Verfahrens entsprechend¹⁰⁾ zum Roten hin verschoben ist.

Die Farbdichtekurven werden meistens durch Aufbelichten eines Silbergraukeiles bestimmt. Dieser muß wegen seines Streuvermögens unmittelbar vor der Filmebene liegen. Ein hochwertiger Keil ist schwierig herzustellen. Mit Hilfe einer Sektorplatte und eines geeignet orientierten Analysators erhält man auf einfache Weise eine Grauskala, deren Stufenhöhe aller-

3.3 Die Basismessung

Nach Abschnitt 3.4 ist für das Komponentenverfahren die Kenntnis der Basis und damit deren aufwendige Messung nicht erforderlich. Dennoch ist ein Überblick über sie wertvoll, der durch eine Vervollständigung der zur Bestimmung der Extinktionsmatrix ohnehin erforderlichen Aufnahmen gewonnen wurde (ausführliche Messungen bei R. Reuther und R. Meyer¹¹⁾).

Ein Interferenzfilter mit der Durchlässigkeit $f_n(\nu)$ hat bei der relativen spektralen Energieverteilung $\Phi(\nu)$ bis auf einen unwesentlichen Zeitfaktor die Komponenten

$$n x_k = b_k(n \nu_m) \int \Phi(\nu) f_n(\nu) d\nu. \quad (3.6)$$

$n \nu_m$ ist mit ausreichender Genauigkeit der Wert für das Durchlässigkeitsmaximum. Bei bekanntem $\Phi(\nu)$ und $f_n(\nu)$ können durch Komponentenmessung also die Basisfunktionen näherungsweise bestimmt werden.

Bei den Aufnahmen wurde als Lichtquelle eine auf die Verteilungstemperatur von 2850 °K eingestellte Glühlampe verwendet. Für 24 Interferenzfilter im Bereich von 377 bis 749 mμ wurden die Durchlässigkeiten gemessen und die Filterintegrale in Gl. (3.6) berechnet. Abb. 5 zeigt die Basisfunktionen

¹¹⁾ R. Reuther u. R. Meyer, Z. wiss. Phot. 50, I, 96 (1955).

für d
quelle
von
eine
Das M
Abfa
wird
sicht
folien
Beim
tion
Sensi
Energ

D
zen f
poner
länge
kurve
genau
rial l
neben
Abb.
Filter
den,
kurve
Die 2
Schic
Beim
Rolle
von W
nacht

Di
der F
mach
derlic

Fü
Wolt
Norm
ten ei
Norm

und c

12)

für den Drehwinkel φ als Grundvariabler bei 6 mm dickem Quarz. Fehlerquelle bei diesem Verfahren ist die Bandbreite der Filter und die Abweichung von der zugrunde gelegten Energieverteilung. Letztere liefert insbesondere eine zu geringe Blauempfindlichkeit. Das Maximum der b_3 -Funktion und ihr Abfall zu größeren Drehwinkeln hin wird stark durch die in Abb. 5 berücksichtigte Absorption der Polarisationsfolien unterhalb 500 m μ bestimmt. Beim Negativfilm sind die Basisfunktionen näher aneinandergerückt. Die Sensibilisierung ist der vorgesehenen Energieverteilung angepaßt.

Die Basismessung zeigt einige Grenzen für den Basisbegriff und die Komponentenbestimmung auf. Die Wellenlängenunabhängigkeit der Farbdichtekurven konnte im Rahmen der Meßgenauigkeit für das untersuchte Material bestätigt werden. Jedoch treten neben den Empfindlichkeiten nach Abb. 5 Nebenmaxima auf, die mit der Filtermethode nicht genau erfaßt werden, in deren Bereich die Farbdichtekurven jedenfalls viel flacher verlaufen.

Die Nebenempfindlichkeit beruht teils auf der Eigenempfindlichkeit aller Schichten im Blauen, teils auf der gegenseitigen Beeinflussung der Schichten. Beim Positivfilm spielt die Diffusion von Entwickleroxydationsprodukten eine Rolle, beim Negativfilm ist der in entgegengesetzter Richtung wirkende, von W. Behrendt¹²⁾ untersuchte vertikale Eberhardeffekt für den Schleier nachteilig.

Die Schwierigkeit und Umständlichkeit einer genauen Basismessung und der Einfluß von Energieverteilung, Belichtungszeit, Entwicklungszeit usw. machen es praktisch unmöglich, die für das Komponentenverfahren erforderlichen Kenngrößen durch eine Basismessung zu gewinnen.

3.4 Die charakteristischen Zahlen und die Normierungsintegrale

Für die Verwendbarkeit des Farbfilmes ist es ausschlaggebend, daß nach Wolter³⁾ die Kenngrößen auch ohne Kenntnis der Basis durch Messung an Normalfarben gewonnen werden können. Es können einerseits die Komponenten einer Normalfarbe in bezug auf eine Basis berechnet werden, wenn die Normierungsintegrale

$$q_k = \int b_k(\nu) d\nu \quad (3.7)$$

und die charakteristischen Zahlen

$$z_k = \frac{1}{q_k} \int b_k(\nu) e^{2\pi i \nu \nu} d\nu \quad (3.8)$$

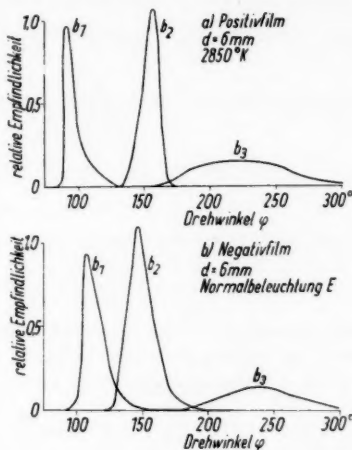


Abb. 5. Die Basisfunktionen des Positiv- und Negativfilmes bei 6 mm Quarzdicke

¹²⁾ W. Behrendt, Z. Naturforschg. 6a, 382 (1951).

der Basis bekannt sind. Andererseits können mit Hilfe der q_k und z_k aus den gemessenen Komponenten die Normalfarbendaten berechnet werden, wenn nur die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{Re} z_1 & \operatorname{Im} z_1 \\ 1 & \operatorname{Re} z_2 & \operatorname{Im} z_2 \\ 1 & \operatorname{Re} z_3 & \operatorname{Im} z_3 \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

ungleich Null ist. Man erhält die transformierten Normalfarbendaten

$$\begin{aligned} \xi &= I, \\ \eta &= IB \cos 2\pi a \mu, \\ \zeta &= IB \sin 2\pi a \mu \end{aligned} \quad (3.10)$$

durch Auflösung des Gleichungssystems

$$\frac{x_k}{q_k} = \xi + \eta \operatorname{Re} z_k + \zeta \operatorname{Im} z_k. \quad (3.11)$$

Auf einfachste Weise gewinnt man die Kennzahlen durch Komponentenmessung an drei gleichabständigen, gesättigten Normalfarben gleichen Mittelwertes I . Sind ${}_1x_k$ ihre Komponenten, dann gilt

$$I \cdot q_k = \frac{1}{3} ({}_1x_k + {}_2x_k + {}_3x_k), \quad (3.12)$$

$$z_k = \frac{i}{\Delta_k} I^2 ({}_2x_k - {}_3x_k) e^{2\pi i a \mu_1} + ({}_3x_k - {}_1x_k) e^{2\pi i a \mu_2} + ({}_1x_k - {}_2x_k) e^{2\pi i a \mu_3} \quad (3.13)$$

mit

$$\Delta_k = I^2 ({}_1x_k + {}_2x_k + {}_3x_k) \sin 120^\circ. \quad (3.14)$$

Zur Berechnung der z_k und q_k auf diesem Wege werden an Testplattenaufnahmen die Komponenten der 12 Normalfarben bestimmt, die zu 4 gleichabständigen Tripeln zusammengefaßt werden. Drehungen in der Gaußschen Zahlenebene führen die Punktetripel der z_k ineinander über. Rechnerischen Auswertungen werden die Mittelwerte aus den vier Einzelmessungen zugrunde gelegt, deren Fehler die mit dem Aufnahmematerial erreichbare Genauigkeit kennzeichnen.

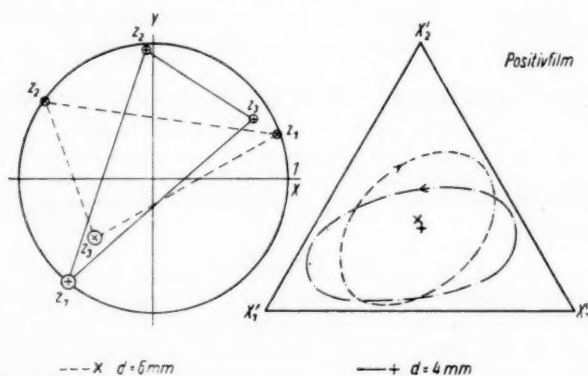


Abb. 6. Charakteristisches Dreieck und Normalfarbenkreis für den Positivfilm

Graphische Auswertungen gehen von der Darstellung des Farbkreises im Farbdreieck mit den normierten Komponenten $x'_k = \frac{x_k}{\sum x_k}$ aus. In Abb. 6 und 7 sind für die beiden Filmtypen solche Farbtafeln und die von den z_k aufgespannten Dreiecke dargestellt, die den Flächeninhalt $\frac{D}{2}$ haben. Die Kreise

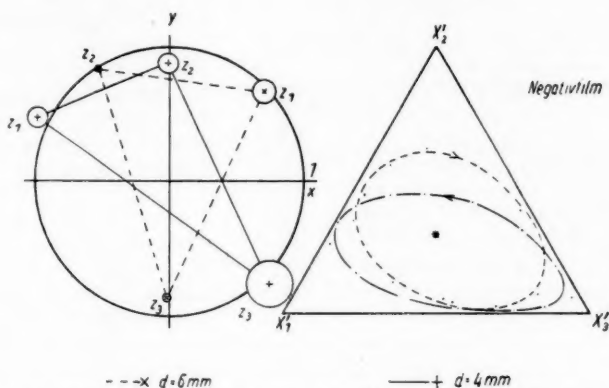


Abb. 7. Charakteristisches Dreieck und Normalfarbkreis für den Negativfilm

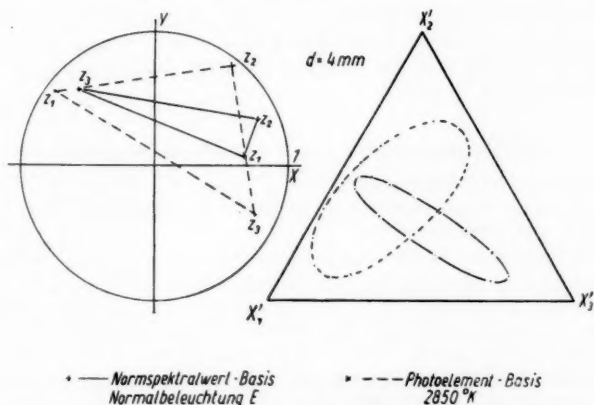


Abb. 8. Die charakteristischen Dreiecke und die Farbenkreise der Photoelementbasis und des IBK-Systems bei 4 mm dickem Quarz

um die z_k geben den mittleren Fehler $|\Delta z_k|$ an. (Energieverteilungen: Positivfilm 2850 °K; Negativfilm 2850 °K gefiltert mit Schott-Filter BG 34 und BG 29 je 2 mm dick.)

An dem nach den ξ, η, ζ aufgelösten Gleichungssystem (3.11) kann leicht festgestellt werden, daß die Determinante D entscheidenden Einfluß hat auf

die Fortpflanzung der Fehler an den x_k , q_k , z_k . Für die optimale Dreipunkt-basis, bei der die Basisfunktionen zu drei gleichabständigen Sommerfeld-schen Zackenfunktionen werden³⁾, wird das charakteristische Dreieck zu einem dem Einheitskreis einbeschriebenen Dreieck ($D = \frac{3}{2} \sqrt{3} \approx 2,60$), die Darstellung im Farbdreieck zum einbeschriebenen Kreis. Als Vergleich zu den Farbfilmen wurde das Auge mit den Normspektralwertkurven des IBK-

Charakteristische Determinanten ver-schiedener Basissysteme

	Quarzdicke	
	6 mm	4 mm
optimale Dreipunktbasis	2,60	2,60
IBK-Basis	0,34	0,40
Photoelementbasis	1,529	1,723
Positivfilm (2850 °K)	1,67	1,61
Negativfilm:		
a) 2850 °K, BG 34, BG 29	2,12	1,94
b) Xenonhochdrucklampe	2,18	1,60

Systems als Basisfunktionen und ein Senelement mit drei Filtern (Schott RG 2, VG 9, BG12) herangezogen (Abb. 8). Die beigefügte Tabelle gibt eine Zusammenstellung der charakteristischen Determinanten.

Die beiden Farbfilme bilden eine erstaunlich günstige Basis. Es überrascht, daß der Positivfilm dem Negativfilm keineswegs über-

legen ist, wie es nach dem Sensibilisierungsprinzip zu erwarten war. Tatsächlich unterscheiden sich die Überlappungen auch nur unerheblich. Die Schwäche des Positivfilms ist die breite b_3 -Funktion, die im Quarzsystem etwa die Hälfte der Periodenlänge umfaßt; daher wird $|z_3|$ klein.

Die Messung der charakteristischen Zahlen ermöglicht die Wahl der geeigneten Quarzdicke und der Energieverteilung. Das Vorzeichen von D oder der Umlaufsinn des Farbenkreises gestatten es, den Drehsinn des verwendeten Quarzes zu ermitteln.

3.5 Fehlerbetrachtung und Vergleich der Farbfilme

Die meßtechnische Verwendung von Farbfilmen ist ungewöhnlich. Erfahrungen hierüber liegen kaum vor, so daß eine eingehende Diskussion der Fehlerquellen erforderlich ist.

Zuvor wurde durch spektralphotometrische Messung eine ausreichende Genauigkeit in der Herstellung der Normalfarben sichergestellt. Für die Photoelementbasis konnten die $|z_k|$ und die q_k auf etwa 0,5% genau gemessen werden, für den Positivfilm lagen die Fehler bei 2 bis 5% für die $|z_k|$ und bei 1 bis 2% für die q_k .

Die Genauigkeit der Gesamtdichtemessung ist wesentlich durch den Schleier bedingt. Dieser muß nicht unbedingt niedrig sein; es muß jedoch die Konzentration der Farbstoffe im Schleier unabhängig von der spektralen Verteilung der Belichtung sein. Beim Negativfilm ist dies wegen des vertikalen Eberhard-Effektes nur bedingt erfüllt, wodurch sogar die z_k dem Betrage nach größer als eins werden können. Auch hinsichtlich der Extinktionsmatrix ist nach Abschnitt 3.2 der Negativfilm unterlegen.

Aus den Einzelschichtdichten werden die Komponenten um so genauer gemessen, je steiler die Farbdichtekurven verlaufen. Auch hier ist der Positivfilm geeigneter, bei dem der Gradationskoeffizient durch die Entwicklungs-

dauer verändert werden kann. Der Vorzug der Steilheit kann erst völlig ausgeschöpft werden, wenn die Farbdichtekurven genau gemessen werden. Daher wird die Meßgenauigkeit größer, wenn für die Aufnahme der Grauskala die Testplatte durch eine andere Platte mit größerer Stufenzahl und gleichmäßiger Stufenhöhe ersetzt wird.

Obwohl der Positivfilm die kleinere charakteristische Determinante besitzt, ist er dem Negativfilm in der Meßgenauigkeit überlegen. Vorteilhaft ist beim Negativfilm die höhere Empfindlichkeit und die Anpassungsfähigkeit an verschiedene Energieverteilungen.

Für den Positivfilm wurden noch einige weitere Fehlerquellen untersucht. Zur Prüfung der Materialgleichmäßigkeit wurden einem Kleinbilddfilm üblicher Länge an verschiedenen Stellen Testplattenaufnahmen entnommen und für jede Aufnahme die Mittelwerte der z_k und q_k bestimmt. Diese Mittelwerte zeigen eine erheblich geringere Streuung als die vier Einzelmessungen an einer Aufnahme. Der Belichtungsspielraum nimmt mit steigender Entwicklungsdauer ab. Bewährt hat sich eine mittlere Entwicklungsdauer von 7 Minuten. In diesem Falle sind die Kenngrößen in einem Bereich von 1:4 von der Belichtungsdauer unabhängig. Eine Änderung der Verteilungstemperatur um $\pm 100^\circ\text{K}$ verschiebt zwar die q_k geringfügig, die Änderungen der z_k liegen aber noch innerhalb der Fehlergrenzen.

Der Einfluß der Entwicklungsdauer ist nach Abb. 9 recht groß, so daß nur gleich entwickelte Aufnahmen gemeinsam ausgewertet werden können. Bei längerer Entwicklung wird vor allem $|z_3|$ kleiner. Dies beruht auf den Nebenempfindlichkeiten im Blauen, die bei großen Farbdichten die Farbtonunterschiede verringern.

Um eine Summierung der Fehler zu vermeiden, wird man Normalfarben und Objekt möglichst bei gleicher Energieverteilung, gleicher Zeit und Beleuchtungsstärke auf einem Film aufnehmen und für gleichmäßige Entwicklung des gesamten Films sorgen. Mit Unterschieden zwischen einzelnen Emulsionsnummern muß gerechnet werden.

Ganz allgemein ist es keineswegs so, daß an einen Film für Meßzwecke in jeder Beziehung besonders hohe Anforderungen gestellt werden müßten. Im Gegensatz zur bildmäßigen Photographie stören Unterschiede in der Empfindlichkeit oder in dem Verlauf der Farbdichtekurven innerhalb recht weiter Grenzen nicht. Ob die Normalfarben naturgetreu wiedergegeben werden, ist gleichgültig.

Weiterhin folgt, daß der Umkehrfilm zwar geeignet für anschauliche Farbschlierenaufnahmen aber ungeeignet für das Komponentenverfahren ist. Er entspricht in seiner Sensibilisierung dem Negativfilm und verwendet die Positivfarbstoffe. Sein Belichtungsspielraum ist vergleichsweise eng, seine Farbdichtekurven verlaufen flach, ohne daß damit die Anpassungsfähigkeit

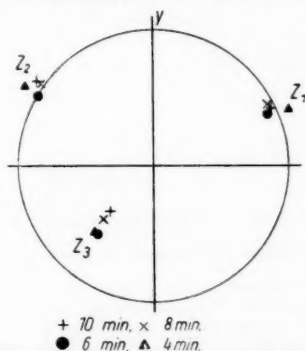


Abb. 9. Die charakteristischen Zahlen des Positivfilmes in Abhängigkeit von der Entwicklungsdauer

an verschiedene Energieverteilungen verknüpft ist. Die Umkehrentwicklung ist Quelle zusätzlicher Fehler und kann meistens nicht vom Verarbeiter durchgeführt werden. Die Messung der Extinktionsmatrix ist umständlich.

4. Ein Beispiel für das Komponentenverfahren

Abschließend soll die Funktionsfähigkeit des Komponentenverfahrens an einem einfachen Beispiel dargelegt werden. Hierzu muß der Zusammenhang zwischen der Lichtablenkung und den Daten der im Bildpunkt durch Mischung entstehenden Normalfarben bekannt sein, der für eine kontinuierliche und eine 18teilige Schlierenplatte von U. Schmidt⁵⁾ berechnet wurde. Bei einer 12-teiligen Platte wird die Rechnung wegen der Symmetrieeigenschaften besonders einfach. Die Sättigung B ist nach Abb. 10 praktisch davon unabhängig, in welcher Richtung das Blendenbild mit dem Radius R_0 vom Mittelpunkt der Sektorscheibe aus verschoben wird.

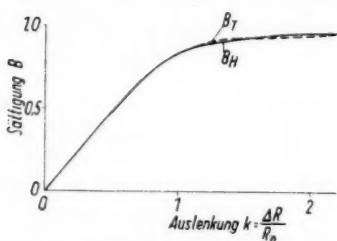


Abb. 10. Normalfarbensättigung B als Funktion der Auslenkung $k = \frac{AR}{R_0}$ des Blendenbildes mit dem Radius R_0 . B_T Sättigung bei Auslenkung längs der Trennlinie zweier Sektoren, B_H Sättigung längs der Halbierungslinie eines Sektors

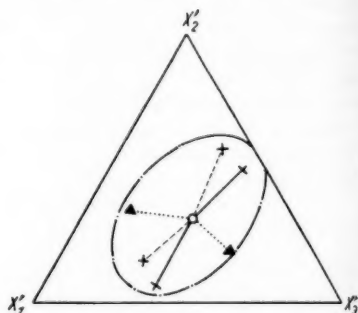


Abb. 11. Zur Messung der Winkel eines Fresnelschen Biprismas. Normalfarbenkreis mit Farborten der Prismenflächen und des Graufeldes bei 3 Polarisationsrichtungen des Analysators (▲ willkürliche Nullrichtung; + = $\pi/4$; x = $\pi/4$)

Als Schlierenobjekt wurde ein Fresnelsches Biprisma gewählt, dessen Seitenflächen nach Angabe des Herstellers eine Steigung von 1:100 hatten. (Experimentelle Einzelheiten zur verwendeten Schlierenanordnung: Lichtquelle Glühlampe 6 V, 5 A; Blendendurchmesser 2 mm; Kondensor Schneider Xenar 180 mm, Objektiv Schneider Xenar $f = 306,8 \pm 0,5$ mm, Durchmesser des Blendenbildes auf der Sektorplatte 1,67 mm, Positivfilm.)

Abb. 11 zeigt die Farborte der Prismenfläche und des Graufeldes für drei verschiedene Polarisatorstellungen (Unterschiede der Polarisationsrichtungen $\pi/4$). Es wurden je 2 Aufnahmen mit $1/2$ und 1 sec Belichtungszeit zusammengefaßt. Es ist unmittelbar zu sehen, daß die Ablenkungen durch die Prismenflächen verschieden groß sind und nicht unter dem Winkel π gegeneinander erfolgten.

Die rechnerische Auswertung ergab für die Prismenwinkel im Bogenmaß $(0,90 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$ und $(1,14 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$; der Winkel zwischen den Ablenkungen betrug $148^\circ \pm 3^\circ$. Eine Kontrollmessung nach einem Abbildungs-

verfahren lieferte die Werte $(0,950 \pm 0,005) \cdot 10^{-2}$, $(1,109 \pm 0,005) \cdot 10^{-2}$; $152,0 \pm 0,1^\circ$. Der bei der Schlierenaufnahme ausgenutzte Bereich der Testplatte von nur knapp 3 mm Durchmesser um den Mittelpunkt zeigte erhebliche Ungleichmäßigkeiten. Auf diese Weise wurde die Platte Quelle zusätzlicher Fehler, was bei der Beurteilung der erreichten Genauigkeit zu beachten ist.

Mit dem verfügbaren Aufnahmematerial läßt sich die Genauigkeit noch steigern 1. durch die Präzision der Schlierenplatte, 2. durch genauere Bestimmung der Farbdichtekurven, 3. durch genauere Anpassung der Meßwellenlängen an die Absorptionsmaxima der Schichtfarbstoffe.

Herr Prof. Dr. H. Wolter, Direktor des Instituts für Angewandte Physik der Universität Marburg, gab die Anregung zu dieser Arbeit. Ich danke ihm darüber hinaus für seine fördernde Anteilnahme und hilfsbereite Unterstützung.

Köln-Stammheim, Gerstenkamp 21.

Bei der Redaktion eingegangen am 2. August 1960.

Zur Theorie der Kernspaltung. II

Die Deformation der Spaltungsfragmente

Von Witlof Brunner und Harry Paul

Mit 5 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes wird (für die Spaltung von U^{235} durch thermische Neutronen) — unter Benutzung der Fongischen Massenformel für die primären Spaltprodukte — aus den experimentellen Daten der mittleren kinetischen Energie der Fragmente die Gesamtanregungsenergie \bar{E} der beiden Bruchstücke berechnet. Diese Energie besitzt ein starkes Minimum für den Fall, daß eines der Bruchstücke in der Nähe magischer Kerne ($N = 82$, $Z = 50$) liegt. Unter der Annahme, daß die Aufteilung von \bar{E} auf die beiden Fragmente im Verhältnis ihrer Massen stattfindet, wird mittels des einfachen Tröpfchenmodells — allerdings unter Berücksichtigung der Abhängigkeit der Oberflächenspannung von der Schalenstruktur — aus \bar{E} die Deformation der Bruchstücke bestimmt. Der Deformationsparameter eines Bruchstückes zeigt, als Funktion der Neutronenzahl des Kernes betrachtet, charakteristische steile Abfälle für die magischen Neutronenzahlen.

Einleitung

Kürzlich¹⁾ wurde von den Verfassern der Versuch unternommen, dem Verständnis des Kernspaltungsprozesses durch die Berücksichtigung einer Kernkraftwechselwirkung zwischen den Fragmenten — auch noch nach deren Trennung — näherzukommen. Aus den experimentellen Daten der Massenverteilung und der mittleren kinetischen Energie der Bruchstücke für die Spaltung von U^{235} durch thermische Neutronen wurde auf eine durch Kernkräfte verursachte potentielle Energie V_K der Fragmente geschlossen, deren Größe wesentlich davon abhängt, wie weit die Bruchstücke abgeschlossene Schalen ausgebildet haben. Bei festem Schwerpunktsabstand der beiden Fragmente zeigt V_K als Funktion des Massenverhältnisses $m = A_S : A_L$ (A_S , A_L Atomgewicht des schweren bzw. leichten Bruchstückes) ein ausgeprägtes Minimum für $m = 1,3$. Es liegt nahe, für diesen Sachverhalt eine von der Schalenstruktur abhängige Deformation der Bruchstücke verantwortlich zu machen. (Ein Einfluß der Schalenstruktur der Fragmente auf ihre Deforma-

¹⁾ W. Brunner u. H. Paul, Ann. Physik (7) **6**, 267 (1960).

tion wurde bereits von Protopopov²⁾ et al. vermutet.) In der Tat kann schon eine verhältnismäßig kleine Deformation wegen der kurzen Reichweite der Kernkräfte zu einer beträchtlichen Änderung von V_K Anlaß geben.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, den ersten Schritt zur Erklärung der Abhängigkeit von V_K von der Schalenstruktur der Bruchstücke zu tun. Es soll untersucht werden, was sich über die Deformation der Bruchstücke „im Augenblick“ ihrer Trennung aussagen läßt. Zu diesem Zweck werden wir den Energiesatz heranziehen, um — unter Verwendung der semiempirischen Massenformel von Fong³⁾ — aus den experimentellen Werten der mittleren kinetischen Energie der Bruchstücke die Anregungsenergie der Fragmente zu bestimmen. Von der Größe dieser Energie wird dann unter Zugrundelegung des Tröpfchenmodells auf die Deformation geschlossen werden, wobei der Abhängigkeit der Oberflächenspannung von der Schalenstruktur Rechnung getragen werden soll. Dabei wird sich herausstellen, daß — im Gegensatz zur Meinung von Fong³⁾ — die Gesamtanregungsenergie der Bruchstücke für $m = 1,3$ (Auftreten der magischen Neutronenzahl 82) minimal wird.

Die aus der Anregungsenergie berechneten Werte des Deformationsparameters eines Bruchstückes weisen (in Abhängigkeit von der Neutronenzahl des Fragments betrachtet) charakteristische tiefe Minima für magische Neutronenzahlen auf.

Die Anregungsenergie der Bruchstücke

Wir beginnen mit der Aufstellung der Energiebilanz für den Spaltungsvorgang. Die Energie des Gesamtsystems besteht vor der Spaltung nur aus den Beiträgen Mc^2 und $M_n c^2$, die von den Massen M und M_n des U^{235} -Kerns bzw. des einfliegenden Neutrons herrühren. (Da wir thermische Neutronen betrachten, ist die kinetische Energie des Neutrons vernachlässigbar klein.) Ohne daß man sich auf ein spezielles Modell für die Kernspaltung festzulegen braucht, kann man sagen: „Im Augenblick“ der Trennung der Bruchstücke setzt sich die Gesamtenergie des Systems zusammen aus den Energien $M_1 c^2$ und $M_2 c^2$ (M_i Masse des Bruchstücks i [$i = 1, 2$]), den Anregungsenergien E_1 und E_2 des Fragments 1 bzw. 2, der potentiellen Energie V (die nach unserer Meinung neben der Coulomb-Energie noch einen Kernkraftanteil enthält, deren explizite Gestalt aber für die jetzige Betrachtung unwesentlich ist) und schließlich einer eventuellen kinetischen Energie κ der Fragmente. Der Energieerhaltungssatz lautet somit:

$$M c^2 + M_n c^2 = M_1 c^2 + M_2 c^2 + E_1 + E_2 + V + \kappa. \quad (1)$$

(Dieser einfache Sachverhalt wurde kürzlich von Gejlikman⁴⁾ erkannt, der — unter Benutzung der Werte E_i , wie sie aus dem Tröpfchenmodell folgen — eine m -Abhängigkeit der rechten Seite von (1) ausrechnete und zum Ausgangspunkt seiner Argumentation machte.)

Beim Auseinanderlaufen der Bruchstücke setzt sich schließlich die potentielle Energie V völlig in kinetische Energie um. Wenn wir annehmen, daß die

²⁾ А. Н. Протопопов, И. А. Баранов, Ю. А. Селицкий, В. П. Эйсмонт, ЖЭТФ **36**, 1932 (1959).

³⁾ P. Fong, Physic. Rev. **102**, 434 (1956).

⁴⁾ Б. Т. Геjликман, АЭ **6**, 290 (1959); [deutsche Übersetzung: Kernenergie **10/11**, 994 (1959)].

Neutronenemission aus jedem Fragment (bezogen auf ein mit dem Bruchstück mitbewegtes Koordinatensystem) isotrop erfolgt (diese Annahme ist im Einklang mit den Experimenten von Fraser⁵⁾), dann stimmt $V + z$ mit der experimentell feststellbaren kinetischen Energie der Bruchstücke, wie sie einerseits von Brunton und Hanna⁶⁾ und andererseits von Stein⁷⁾ gemessen wurde, überein. Nennen wir den Mittelwert der kinetischen Energie der Fragmente T , so können wir also statt (1) schreiben

$$M c^2 + M_n c^2 \quad (2)$$

$= M_1 c^2 + M_2 c^2 + \bar{E} + T$, wobei \bar{E} den Mittelwert der Gesamtanregungsenergie der beiden Fragmente bezeichnen soll.

Um den Energiebeitrag $(M_1 + M_2) c^2$ zu berechnen, verwenden wir die Fongsche³⁾ semiempirische Massenformel. Die zu einem Massenverhältnis $m = A_1 : A_2$ gehörigen Kernladungszahlen Z_1 und Z_2 legen wir durch die Gleichung $Z_1 : Z_2 = A_1 : A_2$ fest. (Bekanntlich — s. z. B. Frisch⁸⁾ — ist die bei einem bestimmten Massenverhältnis auftretende Streuung der Werte Z_1 bzw. Z_2 sehr klein; man kann daher näherungsweise annehmen, daß für jeden Wert von m jeweils nur ein einziges Wertepaar Z_1, Z_2 in Erscheinung tritt. In Ref. ¹⁾ haben wir dieses Wertepaar durch die Forderung maximaler Energiefrei-

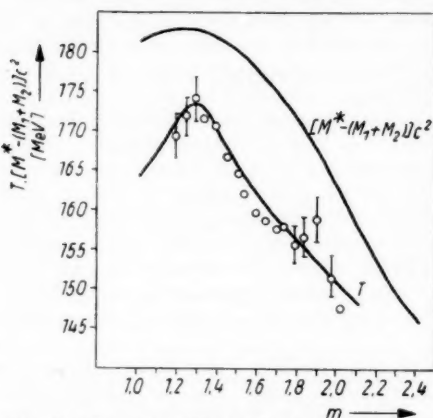


Abb. 1. Energie $[M^* - (M_1 + M_2)] c^2$ (nach Fong³⁾) und mittlere kinetische Energie T (entspr. Ref. ¹⁾) als Funktion des Massenverhältnisses m . \circ Meßwerte von T nach Stein⁷⁾. $[M^* = M + M_n]$

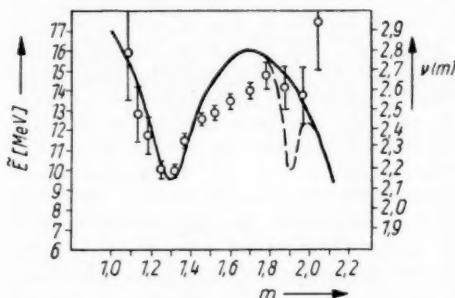


Abb. 2. Kurve: Mittlere Gesamtanregungsenergie \bar{E} der beiden Bruchstücke als Funktion von m . (Die gestrichelte Kurve entsteht durch Berücksichtigung des zweiten Maximums von T bei $m \approx 1,9$ nach Stein⁷⁾). \circ Gemessene Zahl $v(m)$ der bei der Spaltung im Massenverhältnis m von den Bruchstücken emittierten Neutronen nach Ref. ⁹⁾

setzung bestimmt. Es zeigte sich, daß die Abweichung der so erhaltenen Ladungsaufteilung von der „ungeänderten Verteilung“ $Z_1 : Z_2 = A_1 : A_2$ nur gering ist, so

⁵⁾ J. S. Fraser, Physic. Rev. **88**, 536 (1952).

⁶⁾ D. C. Brunton and G. C. Hanna, Can. J. Research **A 28**, 190 (1950).

⁷⁾ W. E. Stein, Physic. Rev. **108**, 94 (1957).

⁸⁾ O. R. Frisch, Progress in Nuclear Physics Vol. II, London 1952, S. 141 ff.

daß man — wenn man überdies die beschränkte Genauigkeit der Fong'schen Formel bedenkt — in guter Näherung mit der ungeänderten Verteilung rechnen darf.) Die so erhaltene Abhängigkeit von $(M_1 + M_2) c^2$ von m zeigt Abb. 1.

Für T setzen wir die ebenfalls in Abb. 1 dargestellten Werte ein, die wir schon früher¹⁾ benutzt haben und die mit den Experimenten von Brunton und Hanna⁶⁾ sowie von Stein⁷⁾ verträglich sind. Mit $M^* c^2 = (M + M_n) c^2 = 219811$ MeV folgt dann aus (2) unmittelbar \tilde{E} . Das Resultat ist aus Abb. 2 ersichtlich. Man erkennt, daß eine minimale Anregungsenergie auftritt, wenn eines der Bruchstücke in der Nähe magischer Kerne ($N = 82$, $Z = 50$) liegt ($m \approx 1,3$). Dieses Ergebnis findet eine ganz wesentliche Stütze in den von Apalin⁹⁾ et al. gemessenen Werten der Zahl $\nu(m)$ der bei der Spaltung im Massenverhältnis m von den beiden Bruchstücken emittierten Neutronen. Der Verlauf dieser Werte, die in Abb. 2 ebenfalls eingetragen sind, stimmt ausgezeichnet mit der von uns erhaltenen Kurve der Anregungsenergie überein.

Wir erwähnen, daß ein zweites Minimum (gestrichelte Kurve in Abb. 2) von etwa gleicher Tiefe in Erscheinung tritt, wenn man das aus den Messungen von Stein⁷⁾ folgende Maximum von T für das Massenverhältnis $m \approx 1,9$ (das der magischen Neutronenzahl $N = 50$ eines Bruchstückes entspricht) berücksichtigt (was wir bisher — im Hinblick auf die Messungen von Brunton und Hanna⁶⁾ — nicht getan haben).

Die Deformation der Bruchstücke

Um von der Anregungsenergie auf die Deformation zu schließen, benutzen wir die Grundvorstellungen des einfachen Tröpfchenmodells. Wir identifizieren die mittlere Anregungsenergie eines Bruchstückes mit der von Bohr und Wheeler¹⁰⁾ in quadratischer Näherung angegebenen Deformationsenergie D_i :

$$D_i = \frac{3}{25} \frac{e^2}{r_0} (\epsilon A_i^{2/3} - Z_i^2 A_i^{-1/3}) \alpha_i^2 \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

Dabei wird die Gestalt des Kerns i durch die Gleichung

$$R_i(\vartheta) = R_i^0 \{1 + \alpha_i P_2(\cos \vartheta)\} \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

beschrieben. [$R_i(\vartheta)$ Kernradius, ϑ Polarwinkel, α_i Deformationsparameter, P_2 Legendresches Polynom.] Für R_i^0 wurde in (3) wie üblich $A_i^{1/3} r_0$ eingesetzt. e ist die elektrische Elementarladung, für $\epsilon \equiv \left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{kritisch}}$ benutzen wir den Wert 50, und r_0 setzen wir gleich $1,4 \cdot 10^{-13}$ cm. Aus (3) ergeben sich unter der Annahme, daß die gesamte Anregungsenergie im Verhältnis $A_1:A_2$ auf die beiden Fragmente aufgeteilt ist, die in Abb. 3, Kurven a, wiedergegebenen Werte der Deformationsparameter α_S und α_L des schweren bzw. leichten Bruchstückes.

Um die Abhängigkeit der Deformation von der Schalenstruktur der Kerne deutlich erkennbar zu machen, wurde in Abb. 4, Kurve a, das Quadrat des Deformationsparameters α als Funktion der Neutronenzahl N des betreffenden

⁹⁾ В. Ф. Апалин, Ю. П. Добрынин, В. П. Захарова, И. Е. Кутиков, Л. А. Микаэлян АЭ 8, 15 (1960).

¹⁰⁾ N. Bohr and J. Wheeler, Physic. Rev. 56, 426 (1939).

Kerns aufgetragen. Man erkennt deutliche Abfälle bei den magischen Neutronenzahlen 50 und 82. Das zusätzliche Minimum für $N = 62$ ist das „Spiegelbild“ des Minimums bei $N = 82$; die Kerne mit den Neutronenzahlen 62 und 82 repräsentieren nämlich das leichte bzw. schwere Bruchstück, das bei der Spaltung im Massenverhältnis $m = 1,27$ auftritt. In unmittelbarer Nähe

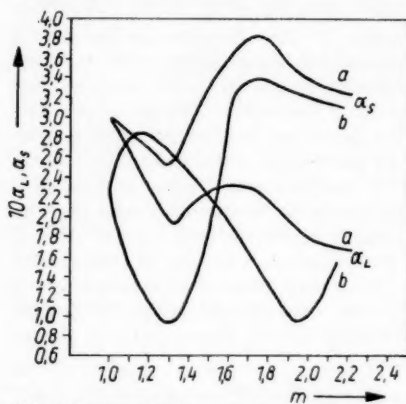


Abb. 3. Deformationsparameter α_s und α_L des schweren bzw. leichten Bruchstücks (in Abhängigkeit von m). Kurven a ohne und Kurven b mit Berücksichtigung der Variabilität der Oberflächenspannung

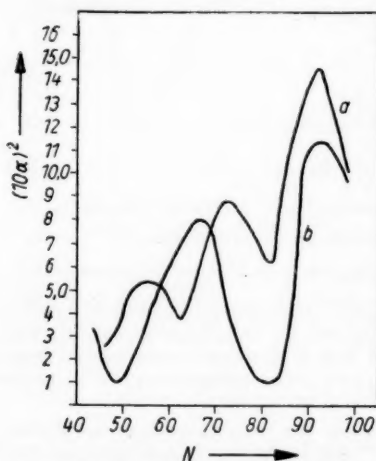


Abb. 4. Deformation in Abhängigkeit von der Neutronenzahl N des Bruchstücks. Kurve a ohne und Kurve b mit Berücksichtigung der Variabilität der Oberflächenspannung

dieses m -Wertes liegt das Minimum für \bar{E} , und nach dem Prinzip der Aufteilung von \bar{E} im Verhältnis der Massen der Fragmente überträgt sich dieses Minimum auf die einzelnen Anregungsenergien der beiden Bruchstücke.

Nun haben aber neuere Untersuchungen im Rahmen des Kollektivmodells gezeigt, daß die in (3) enthaltene Voraussetzung einer konstanten Oberflächenspannung σ nicht erfüllt ist, vielmehr tritt eine deutliche Vergrößerung (etwa um den Faktor vier!) von σ bei Kernen mit magischen Neutronenzahlen auf, wie aus Abb. 5, in der die σ -Werte nach Alder et al.¹¹⁾ wiedergegeben sind, zu ersehen ist¹²⁾. Diese Werte streuen sehr stark; wir haben — nicht ohne eine gewisse Willkür — die eingezeichnete Kurve des σ -Verlaufs zur Grundlage einer korrekteren Berechnung der Deformation gemacht. Das Ergebnis findet man ebenfalls in den Abbildungen 3 und 4. Man ersieht aus Abb. 4, daß die Berücksichtigung der Schalenstrukturabhängigkeit von σ zu einer starken Vertiefung der Minima bei den magischen Neutronenzahlen führt, während das „nichtmagische“ Minimum (bei $N = 62$) verschwunden ist. — Erwähnt sei schließlich noch, daß die Berücksichtigung des zweiten Minimums von \bar{E} bei $m \approx 1,9$ (s. o.)

¹¹⁾ K. Alder, A. Bohr, T. Huus, B. Mottelson and A. Winther, *Rev. Mod. Physics* **28**, 432 (1956).

¹²⁾ In Ref.¹¹⁾ sind die Werte des Parameters C_2 angegeben, aus denen sich σ ergibt mittels der Beziehung

$$C_2 = 4 (R^0)^2 \sigma - \frac{3}{10 \pi} \frac{Z^2 e^2}{R^0}.$$

eine Vertiefung des Minimums bei $N = 50$ und eine Abschwächung des Maximums bei $N = 94$ in der Kurve b der Abb. 4 bewirkt, jedoch nichts an dem charakteristischen Verlauf der genannten Kurve ändert.

Wir bemerken, daß unsere Berechnung der Deformationsparameter der Spaltungsfragmente natürlich recht roh ist, was einerseits in der Beschränkung auf quadratische Glieder im Ausdruck (3) für die Deformationsenergie und andererseits in der unvermeidlichen Willkür bei der Berücksichtigung der Strukturabhängigkeit der Oberflächenspannung σ (Wahl der in Abb. 5 gezeichneten Kurve) — ganz abgesehen von der Annahme, daß σ nur durch die Neutronenkonfiguration bestimmt ist — begründet ist. Wir glauben aber doch, daß der typische Verlauf der α^2 -Kurve in Abb. 4 (Kurve b) den Tatsachen entspricht.

Aus der vorliegenden Untersuchung folgt somit, daß die Kernbruchstücke eine charakteristische, von der Schalenstruktur abhängige Deformation besitzen, wobei das Quadrat des Deformationsparameters als Funktion der Neutronenzahl durch Abb. 4, Kurve b, gegeben ist. In einer folgenden Arbeit werden wir untersuchen, ob diese Werte für die Deformation der Bruchstücke eine Erklärung der von uns früher¹⁾ semiempirisch erhaltenen m -Abhängigkeit der Stärke der Kernkraftwechselwirkung zwischen den beiden Bruchstücken zu liefern vermögen. Dort soll auch der Versuch unternommen werden, den Verlauf der mittleren kinetischen Energie der Bruchstücke in Abhängigkeit von m (und insbesondere den darin sich äußernden magischen Effekt) als Effekt der schalenstrukturabhängigen Deformation der Bruchstücke zu verstehen.

Wir weisen abschließend darauf hin, daß die von uns gewonnenen Werte für die Gesamtanregungsenergie der Bruchstücke, bei deren Berechnung lediglich der Energiesatz, die experimentellen Daten der mittleren kinetischen Energie der Bruchstücke und die Fongsche semiempirische Massenformel benutzt wurden, in striktem Gegensatz zu der Grundlage der Fongschen Argumentation stehen, nämlich der Vorstellung, daß eine maximale Anregungsenergie dann auftritt, wenn die Bruchstücke magischen Kernen benachbart sind¹³⁾. (Beim Vergleich mit der von Fong³⁾ angegebenen Anregungsenergie G'_{mm} muß man beachten, daß in G'_{mm} die — bei Fong vom Massenverhältnis fast unabhängige — Deformationsenergie der Bruchstücke nicht enthalten ist,

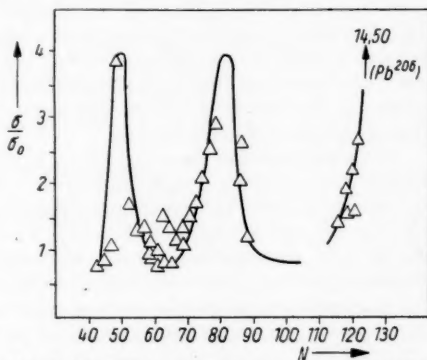


Abb. 5. Oberflächenspannung σ in Abhängigkeit von der Neutronenzahl N nach Ref. 14). Die eingezeichnete Kurve wurde für die Berechnung der Deformationsparameter benutzt. (σ_0 ist der Wert der Oberflächenspannung im einfachen Tröpfchenmodell, der zu $3,83 \cdot 10^{25}$ MeV/cm² angenommen wurde)

¹³⁾ Der gleiche Hinweis auf die Unrichtigkeit der Fongschen Vorstellung über den Verlauf der Anregungsenergie wurde bereits von Apalin⁹⁾ et al. gemacht.

und daß die Anregungsenergie außerdem nicht vom tiefsten Zustand der primären Spaltprodukte, sondern von einem „charakteristischen Niveau“ aus gezählt wird. Aber auch wenn man von G'_{mm} auf die Gesamtanregungsenergie in unserem Sinne umrechnet, bleibt der charakteristische Verlauf der G'_{mm} -Kurve erhalten — im Gegensatz zu unseren Resultaten. Der Grund für diesen Sachverhalt liegt darin, daß Fong mit einer — aus seiner Theorie folgenden — nicht korrekten Verteilung der kinetischen Energie der Bruchstücke [monotone Abnahme dieser Energie mit wachsendem m] rechnet.) Abgesehen davon, daß die Fongsche Theorie nur infolge der Überschätzung der Niveaudichte von Schalenkernen die experimentelle Massenverteilung zu reproduzieren vermag (s. Newton¹⁴), scheint uns somit der Ausgangspunkt der Fongschen Theorie schon unrichtig zu sein.

Außerdem erkennt man aus unserem Ergebnis die Grenzen der Anwendbarkeit des einfachen Tröpfchenmodells auf den Vorgang der Kernspaltung. Sowohl die gesamte Deformationsenergie $D_1 + D_2$ als auch die Deformationsparameter α_1 und α_2 (vgl. z. B. Frankel und Metropolis¹⁵) hängen in diesem Modell sehr schwach von m ab, während aus den obigen halbempirischen Überlegungen eine beträchtliche Variation der mittleren Anregungsenergie und der Deformationsparameter (mit und ohne Berücksichtigung der Schalenabhängigkeit der Oberflächenspannung) mit dem Massenverhältnis folgt.

¹⁴) T. D. Newton, Chalk River report CRP-642-A, 307.

¹⁵) S. Frankel and N. Metropolis, Physic. Rev. **72**, 914 (1947).

Zeuthen bei Berlin, Kernphysikalisches Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bei der Redaktion eingegangen am 20. August 1960.

Zur Theorie der Kernspaltung. III

Die Abhängigkeit der Kernkraftwechselwirkung und der kinetischen Energie von der Deformation

Von Witlof Brunner und Harry Paul

Mit 6 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Die kürzlich von den Verfassern angestellten Überlegungen zur Theorie der Kernspaltung führten zu der Vorstellung einer von der Schalenstruktur der Bruchstücke abhängigen Tiefe V_K^0 des zwischen den beiden Fragmenten wirkenden Kernkraftpotentials. Aus dem dort erhaltenen quantitativen Verlauf von V_K^0 als Funktion des Massenverhältnisses der Bruchstücke wird nun — unter der Annahme, daß sich die Schalenstruktur im wesentlichen über den Mechanismus einer (je nach der Nukleonenkonfiguration verschieden starken) Deformation der Bruchstücke auswirkt — auf die Deformation der Spaltprodukte „im Augenblick“ ihrer Entstehung geschlossen. Das Ergebnis befindet sich in sehr guter Übereinstimmung mit dem Resultat einer früher durchgeführten, völlig unabhängigen semiempirischen Berechnung der gleichen Deformation. Weiterhin gelingt es, mit denselben Werten der Deformationsparameter zu einem quantitativen Verständnis der Daten der experimentellen kinetischen Energie der Bruchstücke zu gelangen, die einen wesentlichen Parameter der anfangs erwähnten Theorie darstellen.

Einleitung

In einer früheren Arbeit¹⁾ schlugen wir eine Theorie der Kernspaltung vor, in der erstmalig dem Einfluß einer Wechselwirkung der Spaltstücke durch Kernkräfte (auch noch nach der Trennung der Fragmente) auf den Spaltungsvorgang Rechnung getragen wurde. Das aus der Wirkung dieser Kräfte resultierende Kernkraftpotential V_K zwischen den beiden Fragmenten wurde damals aus den empirischen Daten der Massenverteilung und der mittleren kinetischen Energie der Bruchstücke für den Fall der Spaltung von U^{235} durch thermische Neutronen berechnet. Es ergab sich eine interessante Abhängigkeit der Tiefe V_K^0 dieses Potentials von der Nukleonenkonfiguration der Fragmente (siehe Abb. 1, in der die V_K^0 -Kurve der Arbeit¹⁾ noch einmal wiedergegeben ist):

Für den Fall, daß eines der Bruchstücke die magische Neutronenzahl 82 oder die magische Protonenzahl 50 besitzt (dieser Fall entspricht dem

¹⁾ W. Brunner u. H. Paul, Ann. Physik (7) **6**, 267 (1960).

Wert 1,3 des Massenverhältnisses $m = A_S : A_L$, wobei A_S und A_L das Atomgewicht des schweren bzw. leichten Fragments bezeichnen), tritt ein stark ausgeprägtes Minimum im Verlauf von V_K^0 auf.

Wir werden in der vorliegenden Arbeit dartun, daß eine einfache Erklärung dieses Sachverhalts durch die Annahme einer mit der Nukleonenkonfiguration variierenden Deformation der Bruchstücke „im Augenblick“ ihrer Entstehung gegeben werden kann. Wir werden im folgenden diejenigen Werte α_S und α_L der Deformationsparameter des schweren bzw. leichten Bruchstücks ermitteln, die gerade

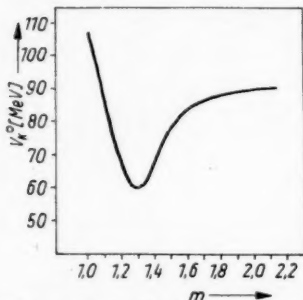


Abb. 1. Tiefe V_K^0 des Kernkraftpotentials [nach Ref. ¹⁾] in Abhängigkeit vom Massenverhältnis m der Bruchstücke

wie nach den experimentellen Daten der Deformation für den Grundzustand auch zu erwarten ist.

Wir werden außerdem zeigen, daß die gleiche Deformation auch ein quantitatives Verständnis des Verlaufs der mittleren kinetischen Energie T der Bruchstücke (in Abhängigkeit von m) erlaubt, den wir in Arbeit ¹⁾ den experimentellen Daten entnommen haben. Im besonderen ist so eine Erklärung des magischen Effektes im T -Verlauf (Maximum bei dem Massenverhältnis $m = 1,3$, bei dem eines der Bruchstücke magisch ist) möglich. Da das Zusammenspiel dieses Effektes mit dem magischen Effekt im Verlauf des Kernkraftpotentials (s. o.) nach unseren Vorstellungen wesentlich die Spaltungsasymmetrie bedingt, gelangen wir somit zu einem Verständnis der Spaltungsasymmetrie als Folge einer schalenstrukturabhängigen Deformation der Fragmente.

Das Kernkraftpotential zwischen deformierten Kernen

In Ref. ¹⁾ wurde das zwischen den Spaltbruchstücken wirksame Kernkraftpotential V_K in der Form

$$V_K(x) = -V_K^0 e^{-\mu x} \quad \left(\mu = \frac{Mc}{\hbar} \right) \quad (1)$$

angesetzt. Hier ist M die Masse des π -Mesons und x die Differenz $s - R$, wobei s den Schwerpunktsabstand der beiden Fragmente bezeichnet und R den Wert $10 \mu^{-1}$ besitzt. ($R = 10 \mu^{-1}$ ist größenordnungsmäßig der Wert von s „im Augenblick“ der Trennung der beiden Bruchstücke, wenn man alle

²⁾ W. Brunner u. H. Paul, Ann. Physik (7) 7, 326 (1961).

Fragmente durch Kugeln approximiert.) V_K^0 wurde dann so bestimmt, daß die Theorie die experimentelle Massenverteilung reproduziert (Abb. 1).

Wir bemerken zunächst, daß Gl. (1) unabhängig von der Vorstellung, daß die Bruchstücke eine kugelförmige Gestalt besitzen, gültig ist: man darf im Fall deformierter Kerne lediglich den Wert $R = 10 \mu^{-1}$ nicht mit dem Abstand der Bruchstücke „im Augenblick“ ihrer Trennung identifizieren. (Für die Spaltungswahrscheinlichkeit ist nicht die Größe von V_K bei Beginn des Auseinanderlaufens der Bruchstücke, sondern der Wert von V_K an der Stelle des Eindringens in den Tunnel maßgebend!)

Es handelt sich nun darum, das Kernkraftpotential zwischen zwei deformierten Bruchstücken zu berechnen. Wir beschreiben die Deformation in der üblichen Weise in der einfachsten Näherung durch die Beziehung

$$R_i(\vartheta) = R_i^0 \{1 + \alpha_i P_2(\cos \vartheta)\} \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

[$R_i(\vartheta)$ Kernradius, ϑ Polarwinkel, α_i Deformationsparameter, P_2 Legendresches Polynom], wobei wir annehmen, daß eine Dehnung beider Bruchstücke in Richtung der Verbindungslinie der Schwerpunkte stattfindet, d. h. wir zählen ϑ von der durch den vektoriellen Schwerpunktsabstand definierten Richtung aus.

Der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten, die verschiedenen Bruchstücken angehören, verringert sich — verglichen mit dem entsprechenden Abstand bei zwei Kugeln (Radius R_1^0 bzw. R_2^0) im gleichen Schwerpunktsabstand s — durch die Deformation offenbar um den Wert $R_1^0 \alpha_1 + R_2^0 \alpha_2$. Infolge der kurzen Reichweite der Kernkräfte tragen zum Kernkraftpotential V_K nur die Bereiche eines Kerns wesentlich bei, die dem gegenüberliegenden Kern möglichst nahe sind. In einer ersten Näherung kann man daher dieses Potential für zwei (entsprechend (2)) deformierte Kerne dadurch berechnen, daß man es dem Potential für zwei Kugeln gleichsetzt, deren Schwerpunktsabstand s gegenüber dem s -Wert der deformierten Kerne um den Betrag $R_1^0 \alpha_1 + R_2^0 \alpha_2$ verkleinert ist. D. h. das Kernkraftpotential $V_K(\alpha_1, \alpha_2; x)$ zwischen zwei deformierten Kernen (Deformationsparameter α_1 bzw. α_2) ist näherungsweise durch den Ausdruck

$$V_K(\alpha_1, \alpha_2; x) = V_K(0, 0; x - [R_1^0 \alpha_1 + R_2^0 \alpha_2]) \quad (3)$$

gegeben.

$V_K(0, 0; x) = -V_K^0(0, 0) e^{-\mu x}$ ist die potentielle Energie zweier Kugeln, wobei $V_K^0(0, 0)$ (wie wir in Ref. 1), Anhang, theoretisch abschätzten) nur schwach von m abhängt und größenordnungsmäßig den Wert 135 MeV besitzt. Aus (3) folgt offenbar, wenn wir $V_K(\alpha_1, \alpha_2; x) = -V_K^0(\alpha_1, \alpha_2) e^{-\mu x}$ schreiben,

$$V_K^0(\alpha_1, \alpha_2) = e^{\mu(R_1^0 \alpha_1 + R_2^0 \alpha_2)} V_K^0(0, 0). \quad (4)$$

Die Größe $V_K^0(\alpha_1, \alpha_2)$, die im wesentlichen nur über α_1 und α_2 von m abhängt, ist mit dem früheren¹⁾ $V_K^0(m)$ zu identifizieren:

$$V_K^0(m) = e^{\mu(R_1^0 \alpha_1 + R_2^0 \alpha_2)} V_K^0(0, 0). \quad (4')$$

Diese Gleichung dient zur Berechnung der Deformation. Wir vereinfachen (4') noch dadurch, daß wir genähert $\mu R_1^0 \approx \mu R_2^0 \approx 5$ setzen (was in dem uns interessierenden m -Bereich gerechtfertigt ist). Außerdem begnügen wir uns

(da wir den Wert $V_K^0(0,0)$ nicht genau kennen) mit der Berechnung von $\alpha_1(m) + \alpha_2(m) - [\alpha_1(1) + \alpha_2(1)]$. Aus (4') folgt dann unmittelbar

$$V_K^0(m): V_K^0(1) = e^{5(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha^0)}, \quad (5)$$

wobei $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$ mit α^0 bezeichnet wurde.

Die Auswertung der Relation (5) liefert leicht die in Abb. 2 dargestellten Werte von $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha^0$ in Abhängigkeit von m . Die Werte von α_1 und α_2 selbst ergeben sich dann aus der Forderung, daß sich die Deformationsenergien der beiden Bruchstücke wie ihre Massen verhalten. Das Resultat zeigt Abb. 3 (und Abb. 4, Kurve b), in welcher das Quadrat des Deformationsparameters α als Funktion der Neutronenzahl N des Bruchstückes aufgetragen ist.

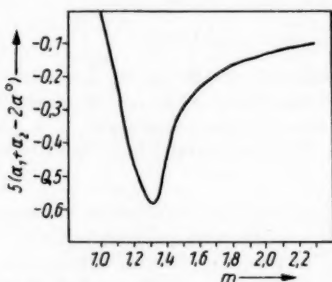


Abb. 2. Die Summe der Deformationsparameter $\alpha_1 + \alpha_2$, wie sie aus der Kernkraftwechselwirkung [nach Ref.¹⁾] folgt, als Funktion des Massenverhältnisses m . (α^0 ist der Deformationsparameter für $m = 1$)

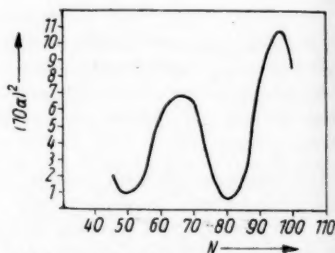


Abb. 3. Aus Abb. 2 unter Berücksichtigung der Forderung, daß sich die Anregungsenergien der Bruchstücke wie ihre Massen verhalten, folgende Abhängigkeit der Deformation von der Neutronenzahl N des Fragments

Es sei an dieser Stelle noch kurz auf die Frage eingegangen, wie sich die Berücksichtigung des zweiten Maximums (bei $m = 1,9$) im Verlauf der Kurve der mittleren kinetischen Energie der Bruchstücke, auf das die Meßwerte von Stein³⁾ hinzudeuten scheinen, das aber in Ref.¹⁾ im Hinblick auf die Messungen von Brunton und Hanna⁴⁾ nicht berücksichtigt wurde, auf unser Ergebnis auswirkt. Das genannte zweite Maximum gibt zunächst Anlaß zu der Ausbildung eines zweiten Minimums (für $m = 1,9$) in der V_K^0 -Kurve von Ref.¹⁾, und damit, nach dem obigen Rechengang, zu einer Verminderung von α in der Nachbarschaft von $N = 50$ und $N = 94$ (genau wie bei der Berücksichtigung des zweiten Maximums von T in der Arbeit²⁾). Die charakteristische Gestalt der α^2 -Kurve wird jedoch nicht geändert.

Zum Vergleich sind in Abb. 4 außerdem die α^2 -Werte aufgetragen, die wir in der oben erwähnten früheren Arbeit²⁾ auf völlig anderem Wege berechneten (halbempirisch aus der experimentellen Verteilung der mittleren kinetischen Energie der Bruchstücke mittels der Fong'schen⁵⁾ Massenformel unter Ver-

³⁾ W. E. Stein, Physic. Rev. **108**, 94 (1957).

⁴⁾ D. C. Brunton and G. C. Hanna, Can. J. Research A **28**, 190 (1950).

⁵⁾ P. Fong, Physic. Rev. **102**, 434 (1956).

wendung von Tröpfchenmodellvorstellungen, wobei der Schalenstrukturabhängigkeit der Oberflächenspannung Rechnung getragen wurde). Die Übereinstimmung beider α^2 -Kurven ist offenbar sehr gut; die in Arbeit²⁾ berechnete Deformation der Bruchstücke „im Augenblick“ der Trennung ist somit tatsächlich in der Lage, die früher postulierte Abhängigkeit der Kernkraftwechselwirkung zwischen den beiden Bruchstücken von der Schalenstruktur der Fragmente auch quantitativ völlig befriedigend zu erklären. Eine weitere Stütze erfahren unsere in den Kurven der Abb. 4 enthaltenen Ergebnisse, wenn man sie mit den Werten der Deformationsparameter für den Grundzustand von Kernen mit der gleichen Neutronenzahl N vergleicht, die aus verschiedenen Messungen (reduzierte Wahrscheinlichkeit von $E2$ -Übergängen, elektrisches Quadrupolmoment, Trägheitsmoment) folgen, und in Abb. 4 ebenfalls eingezeichnet sind. Die Übereinstimmung in der charakteristischen Wachstumstendenz dieser Werte mit unseren Kurven kann als Ausdruck dafür angesehen werden, daß Kerne, die schon im Grundzustand stark deformiert sind, sich bei Anregung leicht noch stärker deformieren lassen, während Kerne mit geringer Deformation im Grundzustand auch bei Anregung wenig Neigung zu einer Deformation zeigen.

Wir erwähnen, daß die mit konstanter Oberflächenspannung erhaltenen α -Werte (Ref.²⁾, Abb. 4, Kurve a) zu einer V_K^0 -Abhängigkeit führen, die von der in Abb. 1 dargestellten merklich abweicht.

Die kinetische Energie deformierter Bruchstücke

Die beiden Spaltstücke bilden nach ihrer Trennung ein Zweiteilchen-System, dessen Wechselwirkungspotential V sich aus Coulomb-Energie V_C und Kernkraftpotential V_K zusammensetzt. Nach dem obigen kann für V geschrieben werden

$$V = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{s} - V_K^0(0,0) e^{\mu(x_1 R_1^0 + \alpha_1 R_2^0) - \mu(s-R)} \quad (6)$$

$$s > (1 + \alpha_1) R_1^0 + (1 + \alpha_2) R_2^0.$$

An der Stelle $s = s_0 \equiv (1 + \alpha_1) R_1^0 + (1 + \alpha_2) R_2^0$ berühren sich die beiden Bruchstücke.

*) K.-S. Wohlrab, „Theorie leichter bis schwerer Kerne“ in G. Hertz, Lehrbuch der Kernphysik Bd. 2, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1961.

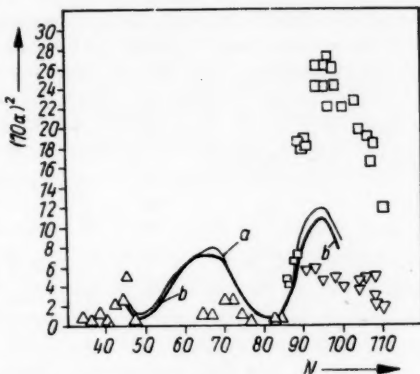


Abb. 4. Kurve a: Das Quadrat des Deformationsparameters α nach Ref.²⁾. Kurve b: α^2 wie in Abb. 3 (zum Vergleich hier wiedergegeben). Eingezeichnet sind Werte von α^2 , die aus Messungen (∇ der reduzierten $E2$ -Übergangswahrscheinlichkeit, \triangle des elektrischen Quadrupolmoments, \square des Trägheitsmoments) folgen, wie sie von Wohlrab*) zusammengestellt wurden

Das virtuelle Niveau ε des Zweiteilchen-Systems, über das der Zerfall stattfindet, ist durch eine komplizierte, uns unbekannte Randbedingung für die zugehörige Wellenfunktion Ψ an der Stelle $s = s_0$ und die Forderung, daß für $s \rightarrow \infty$ nur eine auslaufende Welle vorhanden sein soll, definiert. Wir machen die Annahme, daß die genannte Randbedingung genähert unabhängig vom Massenverhältnis m ist, was angesichts der Tatsache, daß die physikalische Situation (Kontakt zwischen den Fragmenten) jeweils dieselbe ist, plausibel erscheint. Für die folgende Überlegung, deren Ziel die Berechnung der Variation von ε mit m darstellt, ist die explizite Form der Randbedingung unwesentlich.

Wenn wir $s - s_0$ mit s' bezeichnen (s' läuft dann stets von Null an), können wir statt (6) schreiben

$$V(s') = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{s' + s_0} - \hat{V}_K e^{-\mu s'}. \quad (7)$$

Hier wurde $V_K^0(0,0) e^{-\mu(R_1^0 + R_2^0 - R)}$ mit \hat{V}_K bezeichnet. \hat{V}_K ist das Kernkraftpotential für zwei sich berührende Kerne, das (in unserer Näherung) gleich dem Potential zweier sich berührender Kugeln ist. $V_K^0(0,0)$ kann man nach Gl. (4') berechnen, indem man dort etwa $m = 1$ setzt und den Wert $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$ aus Ref. ²⁾ entnimmt. Nach der in Ref. ¹⁾ (Anhang) durchgeführten theoretischen Abschätzung hat man für \hat{V}_K etwa 135 MeV zu setzen, damit ergibt sich dann $R_1^0 + R_2^0$ genähert zu $8,5 \mu^{-1}$ ⁶⁾.

Nun ist die Lage des virtuellen Niveaus hauptsächlich durch das von $s' = 0$ aus ansteigende Stück von $V(s')$ bestimmt, während die genaue Form des Abfalls von $V(s')$ bei größeren Werten s' relativ unwichtig ist. Das bedeutet, es interessiert $V(s')$ hauptsächlich im Bereich $0 \leq \mu s' \lesssim 2$, dort ist $0 \leq \frac{s'}{s_0} \lesssim \frac{1}{6}$, und man kann sich daher bei einer Entwicklung des ersten Gliedes in (7) nach Potenzen von s' auf die ersten beiden Terme beschränken:

$$V(s') = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{s_0} - \frac{Z_1 Z_2 e^2 s'}{s_0^2} - \hat{V}_K^0 e^{-\mu s'}. \quad (8)$$

Im zweiten Term kann man überdies noch die Variation von $Z_1 Z_2 s_0^{-2}$ mit m vernachlässigen. Man kommt so zu folgendem Ergebnis: Zwei zu verschiedenen m -Werten gehörige Kurven $V(s'; m_1)$ und $V(s'; m_2)$ unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante, d. h. sie gehen durch eine Verschiebung längs der V -Achse ineinander über. Die Größe dieser Verschiebung ist offenbar

$$V(s'; m_2) - V(s'; m_1) = \frac{Z_1(m_2) Z_2(m_2) e^2}{s_0(m_2)} - \frac{Z_1(m_1) Z_2(m_1) e^2}{s_0(m_1)}. \quad (9)$$

Unter der oben formulierten Annahme, daß die Randbedingung für Ψ an der Stelle $s' = 0$ von m unabhängig ist, folgt aus dem Gesagten unmittelbar, daß

⁶⁾ Wir haben bei der Bestimmung von α_1 und α_2 aus der semiempirischen $V_K^0(m)$ -Kurve [s. Gl. (5)] bisher mit $R_1^0 + R_2^0 \approx 10 \mu^{-1}$ gerechnet. Diese Abweichung ist aber praktisch bedeutungslos. Rechnet man nämlich mit $R_1^0 + R_2^0 = 8,5 \mu^{-1}$ statt $10 \mu^{-1}$, so werden sämtliche α -Werte im Verhältnis 10:8,5 vergrößert, während der charakteristische Verlauf der α -Kurven unberührt bleibt. Das unten berechnete virtuelle Niveau $\varepsilon(m)$ [s. Gl. (11)] ändert sich ebenfalls bei dieser Transformation der α -Werte nicht, da α_1 und α_2 in $\varepsilon(m)$ nur in der Kombination $\alpha_1 R_1^0 + \alpha_2 R_2^0$ eingehen, deren Wert direkt aus der Analyse (ohne Verfügung über die Größe von $R_1^0 + R_2^0$) der $V_K^0(m)$ -Kurve folgt.

dann auch das virtuelle Niveau die gleiche Verschiebung erfahren muß:

$$\varepsilon(m_2) - \varepsilon(m_1) = \frac{Z_1(m_2)Z_2(m_2)e^2}{s_0(m_2)} - \frac{Z_1(m_1)Z_2(m_1)e^2}{s_0(m_1)} \quad (10)$$

oder

$$\varepsilon(m) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{(1 + \alpha_1) R_1^0 + (1 + \alpha_2) R_2^0} - \lambda, \quad (11)$$

wobei λ eine m -unabhängige Konstante bezeichnen soll, deren Berechnung nur unter Kenntnis der oben genannten Randbedingung möglich ist, die wiederum aus dem in Arbeit¹⁾ näher definierten A -Teilchen-Problem abzuleiten wäre. Wichtig ist aber gerade, daß sich die Randbedingung nur auf λ auswirkt und die Variation von ε mit m daher unabhängig von der speziellen Form der Randbedingung ist.

Um zu einer größenordnungsmäßigen Abschätzung von λ zu gelangen, beziehen wir uns auf die kürzlich von Almqvist⁷⁾ et al. durchgeführten experimentellen Untersuchungen der C^{12} - C^{12} -Reaktion, die zu der Vorstellung führten, daß die beiden Kohlenstoffkerne (kurzzeitig) ein Quasimolekül bilden (s. Vogt u. McManus⁸⁾ sowie Davis⁹⁾). Eine solche „Molekülbildung“ ist nur möglich, wenn eine abstoßende Kraft zwischen den beiden Kernen auftritt, sobald sie anfangen, sich zu durchdringen. Es erscheint uns zum Zweck einer groben Orientierung nicht unvernünftig, den in Frage stehenden abstoßenden Teil des Potentials durch eine senkrechte Wand bei $s' = 0$ zu idealisieren.

Wir machen weiterhin von der bekannten Tatsache Gebrauch, daß die virtuellen Niveaus eines (schwach durchlässigen) Potentialwalls genähert mit den (echten) Niveaus des entsprechenden Potentialtopfes zusammenfallen, der aus dem Wall dadurch entsteht, daß man den äußeren Abfall des Walles wegläßt und statt dessen das Potential vom Maximum an horizontal nach außen fortsetzt. Wenn wir schließlich noch den Potentialtopf durch ein Exponential-Potential idealisieren, lautet das zu lösende Problem: Bestimmung des tiefsten Energieniveaus für das Potential

$$V(s') = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{s_0} - \beta - (\hat{V}_K - \beta) e^{-\mu s'} \quad \text{für } s' > 0 \quad (12)$$

$$V(s') = \infty \quad \text{für } s' \leq 0.$$

Aus den in Ref.¹⁾ ermittelten Potentialverläufen ergibt sich β genähert zu 25 MeV. Das tiefste Niveau von (12) ist offenbar gegeben durch

$$\frac{Z_1 Z_2 e^2}{s_0} - \beta + \tilde{\varepsilon}, \quad (13)$$

wobei $\tilde{\varepsilon}$ das tiefste Niveau des Potentials $-(\hat{V}_K - \beta) e^{-\mu s'}$ bedeuten soll. Durch Vergleich mit Gl. (11) folgt sofort $\beta - \tilde{\varepsilon} = \lambda$. $\tilde{\varepsilon}$ genügt näherungsweise (s. Flügge-Marschall¹⁰⁾) der Gleichung

$$3\tilde{\varepsilon} = -6(\hat{V}_K - \beta) \left[\frac{1}{1+p} - \frac{2}{1.5+p} + \frac{1}{2+p} \right] \quad \text{mit} \quad p^2 = -\frac{\hbar^2 \mu^2}{8 \nu \tilde{\varepsilon}}. \quad (14)$$

⁷⁾ D. A. Bromley, J. A. Kuehner and E. Almqvist, *Physic. Rev. L.* **4**, 365 (1960).
E. Almqvist, D. A. Bromley and J. A. Kuehner, *Physic. Rev. L.* **4**, 515 (1960).

⁸⁾ E. Vogt and H. McManus, *Physic. Rev. L.* **4**, 518 (1960).

⁹⁾ R. H. Davis, *Physic. Rev. L.* **4**, 521 (1960).

¹⁰⁾ S. Flügge u. H. Marschall, *Rechenmethoden der Quantentheorie I*, Springer 1952, Aufgabe Nr. 51.

In unserem Fall kann man p gegen Eins vernachlässigen, und (14) vereinfacht sich zu

$$\tilde{\varepsilon} = -\frac{1}{3}(\hat{V}_K - \beta), \quad (15)$$

woraus

$$\lambda = \beta + \frac{1}{3}(\hat{V}_K - \beta) \quad (16)$$

folgt. Mit $\beta \approx 25$ MeV und $\hat{V}_K \approx 135$ MeV ergibt sich so $\lambda \approx 62$ MeV.

In Abb. 5 sind die aus Gl. (11) folgenden theoretischen Werte $\varepsilon(m)$ mit den experimentellen Werten (den Daten der mittleren kinetischen Energie T der Bruchstücke) verglichen. Dabei wurde $R_1^0 + R_2^0 \approx 8,5 \mu^{-1}$ gesetzt (s. o.) und der Parameter λ aus der Forderung $\varepsilon(1,3) = 174$ MeV (experimenteller Wert) zu $\lambda = 35,8$ MeV bestimmt. Dieser Wert liegt durchaus in der nach obigem zu erwartenden Größenordnung.

Man ersieht aus der Abbildung, daß die Formel (11) die Variation von T mit dem Massenverhältnis m erstaunlich gut wiedergibt. Insbesondere ist der „magische Effekt“ (Maximum bei $m = 1,3$) völlig ausgeprägt. Dieser Effekt

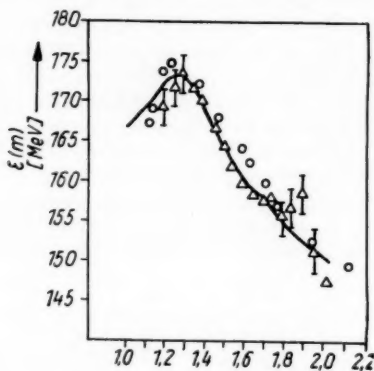


Abb. 5. Die Daten der mittleren kinetischen Energie T der Bruchstücke. Die Kurve repräsentiert die theoretischen Werte [nach Gl. (11) mit $\lambda = 35,8$ MeV]. \triangle Meßwerte nach Stein³⁾. \circ Meßwerte nach Brunton und Hanna⁴⁾

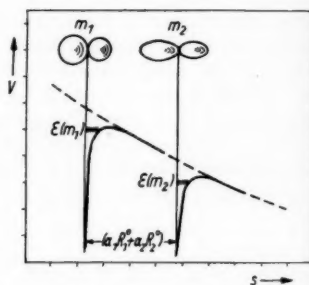


Abb. 6. Der Einfluß der Deformation auf die Lage der Potentialschwelle (schematisch)

ist damit über den Mechanismus einer schaleneffektabhängigen Deformation auch quantitativ verständlich. Die geringe Deformation von Schalenkernen führt zu einer Verminderung des kleinsten Abstandes der beiden Bruchstücke (des Abstandes, bei dem sich die Kerne gerade berühren), die wiederum zu einer Vergrößerung der Coulombenergie für den Fall der Berührung der Bruchstücke und damit zu einem Anheben der gesamten Potentialschwelle Anlaß gibt, wobei naturgemäß das virtuelle Niveau mit emporgehoben wird. (Vgl. Abb. 6, in der die Verhältnisse schematisch dargestellt sind.) Es ist sehr befriedigend, daß die früher aus energetischen Überlegungen gewonnenen

Werte der Deformationsparameter, die schon die Abhängigkeit der Kernkraftwechselwirkung von der Schalenstruktur quantitativ zu erklären vermochten, nun auch den Verlauf der mittleren kinetischen Energie T quantitativ gut wiedergeben, wodurch unsere Vorstellungen an innerer Konsistenz gewinnen.

Schlußbetrachtung

Wir können zusammenfassend feststellen, daß es uns gelungen ist, durch die Vorstellung einer von der Schalenstruktur abhängigen Deformation der Bruchstücke (minimale Deformation der Kerne mit magischen Neutronenzahlen) zu einem, auch quantitativ völlig befriedigenden Verständnis sowohl der früher¹⁾ semiempirisch erhaltenen Variation der Stärke V_K^0 der Kernkraftwechselwirkung mit der Nukleonenkonfiguration als auch des experimentell bekannten Verlaufs der mittleren kinetischen Energie T zu gelangen.

Damit haben wir auch ein gewisses physikalisches Verständnis der Kernspaltung (im bes. der Spaltungsasymmetrie) gewonnen: V_K^0 und T bestimmen (nach unseren in Ref. ¹⁾ dargelegten Vorstellungen) im wesentlichen die Massenwahrscheinlichkeit; V_K^0 legt die Form der Potentialschwelle V fest, die beim Auseinanderlaufen der Bruchstücke zu durchdringen ist, und T die Energie des Zweiteilchen-Systems der beiden Bruchstücke, bei der diese Durchdringung stattfindet. Beide Größen sind über die Deformation schalenstrukturabhängig.

Die Anwendung des bisher entwickelten Formalismus auf andere Targetkerne soll Gegenstand einer folgenden Arbeit sein, in der auch auf die Frage der Spaltung bei höheren Anregungsenergien eingegangen werden soll.

Zeuthen bei Berlin, Kernphysikalisches Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bei der Redaktion eingegangen am 20. August 1960.

Messung der Hyperfeinstrukturaufspaltung des $^4F_{9/2}$ -Grundzustandes im Co^{59} -I-Spektrum und Bestimmung des Quadrupolmomentes des Co^{59} -Kernes ¹⁾

Von Dieter von Ehrenstein

Mit 3 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Fünf der sieben Hyperfeinstrukturaufspaltungen des elektrischen Grundzustandes $a^4F_{9/2}$ im Co^{59} -I-Spektrum wurden mit einer magnetischen Atomstrahlresonanz-Apparatur vermessen mit folgenden Resultaten

$$W(F=8) - W(F=7) = (3655,470 \pm 0,20) \text{ MHz}$$

$$W(F=7) - W(F=6) = (3169,440 \pm 0,05) \text{ MHz}$$

$$W(F=6) - W(F=5) = (2695,056 \pm 0,10) \text{ MHz}$$

$$W(F=5) - W(F=4) = (2230,638 \pm 0,05) \text{ MHz}$$

$$W(F=4) - W(F=3) = (1774,548 \pm 0,05) \text{ MHz}$$

Aus diesen Abständen ergibt sich die magnetische Dipol- bzw. die elektrische Quadrupolwechselwirkungskonstante zu $A(a^4F_{9/2}) = (450,284 \pm 0,01) \text{ MHz}$ bzw. $B(a^4F_{9/2}) = (139,63 \pm 0,5) \text{ MHz}$. — Das metallische Kobalt wurde aus einem durch Elektronenstoß geheizten Zirkonoxyd-Tiegel verdampft. — Bei der Berechnung des elektrischen Kernquadrupolmomentes des Co^{59} -Kernes zu (ohne Sternheimerkorrektur)

$$Q = (0,404 \pm 0,04) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$$

wurde die Mischung des $3d^7 4s^2 a^4F_{9/2}$ -Grundzustandes mit den Zuständen der $3d^7 4s^2$ -Elektronenkonfiguration berücksichtigt.

A. Einleitung

Aus optisch-interferometrischen Untersuchungen²⁾ der Hyperfeinstruktur (Hfs) am Co^{59} -I-Spektrum wurde 1934 der Kernspin $I = 7/2$ und etwas später mit der gleichen Methode³⁾ die magnetische Wechselwirkungskonstante des Grundzustandes $A(a^4F_{9/2}) = +420 \text{ MHz}$ (Fehler etwa $\pm 60 \text{ MHz}$) und das magnetische Kerndipolmoment μ_I bestimmt. Die genaueste Messung mit Kerninduktion⁴⁾ ergab⁵⁾ $\mu_I = 4,6488(5) \mu_K$.

¹⁾ Vorgetragen auf der Frühjahrstagung 1960 der Physikalischen Gesellschaft Württemberg-Baden-Pfalz in Heidelberg.

²⁾ H. Kopfermann u. E. Rasmussen, Naturwiss. **22**, 291 (1934); K. R. More, Physic. Rev. **46**, 470 (1934).

³⁾ E. Rasmussen, Z. Physik **102**, 229 (1936).

⁴⁾ W. G. Proctor u. F. C. Yu, Physic. Rev. **77**, 716 (1950); **81**, 20 (1951).

⁵⁾ Proctor und Yu⁴⁾ erhielten Unterschiede in μ_I bis zu etwa 1%, je nach Art der verwendeten Kobaltverbindung. Der obengenannte Wert ist ein Mittelwert aus diesen Messungen, entnommen aus Ramsey⁶⁾.

⁶⁾ N. F. Ramsey, Molecular Beams, Oxford 1956.

Das Quadrupolmoment wurde wieder optisch-interferometrisch⁷⁾ zu $Q = (0,5 \pm 0,2) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ angegeben. Um diesen Wert zu verbessern, wurde der elektronische Grundzustand des Co^{59} -I-Spektrums in einer magnetischen Atomstrahlresonanzapparatur untersucht. Über die Ergebnisse wurde bereits kurz berichtet⁸⁾.

B. Termschema

a) Feinstruktur

Im Grundmultiplett $3d^7 4s^2 a^4 F$ des Co-I-Spektrums ist der tiefste Term, über dem die zugehörigen $a^4 F_{7/2}$, $a^4 F_{5/2}$ und $a^4 F_{3/2}$ in Abständen von 816 cm^{-1} , 1407 cm^{-1} bzw. 1809 cm^{-1} liegen. Bei einer Temperatur von fast 2000°C , die nötig ist, um den Kobalt-Atomstrahl zu erzeugen, bewirkt die thermische Verteilung der Atome auf die einzelnen Multiplettpartner, daß ein Hfs-Übergang in dem $a^4 F_{9/2}$ -Grundzustand, dessen Vermessung in dieser Arbeit beschrieben wird, nur etwa 44% der Intensität hat, die man ohne Anregung der höheren Feinstrukturterme erwarten dürfte.

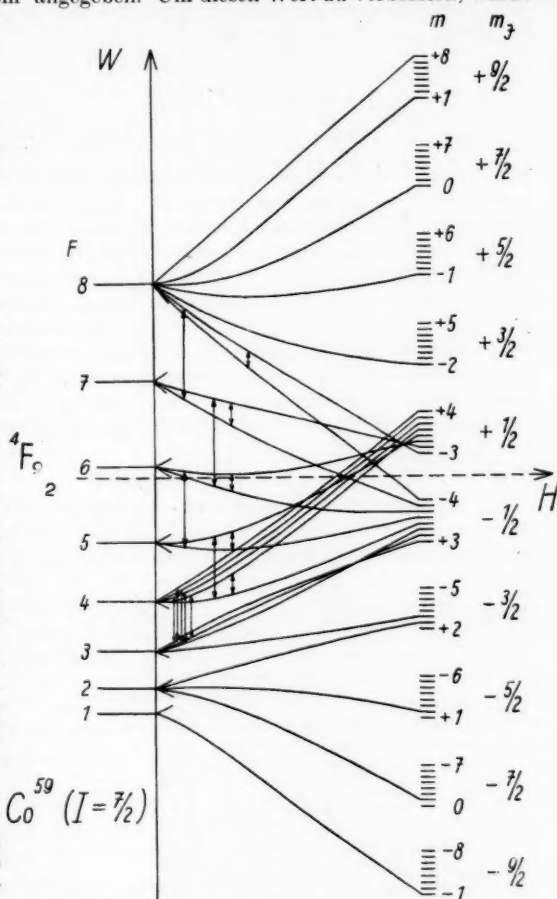


Abb. 1. Qualitativer Verlauf der Zeeman-Aufspaltung der Hfs des $a^4 F_{9/2}$ -Grundzustandes im Co^{59} -I-Spektrum

b) Hyperfeinstruktur

Der Hamilton-Operator \mathcal{H} , der die Hfs-Wechselwirkung zwischen Elektronen und Kern in einem äußeren Magnetfeld H beschreibt, ist gegeben durch⁹⁾ (h = Plancksche Konstante).

$$\mathcal{H} = h A \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} + h B Q + g_J \mu_B \mathbf{J} \cdot \mathbf{H} + g_I' \mu_B \mathbf{I} \cdot \mathbf{H} \quad (1)$$

⁷⁾ K. Murakawa u. T. Kamai, Physic. Rev. **92**, 325 (1953).

⁸⁾ D. v. Ehrenstein, H. Kopfermann u. S. Penselin, Z. Physik **159**, 230 (1960).

⁹⁾ H. Kopfermann, Kernmomente Frankfurt/M. 1956; Nuclear Moments, New York, Academic Press 1958.

Hierbei ist: $\mathbf{I} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^2 - \mathbf{J}^2 - \mathbf{I}^2)$

$$Q = \frac{3(\mathbf{I} \cdot \mathbf{J})^2 + \frac{3}{2} (\mathbf{I} \cdot \mathbf{J}) - \mathbf{I}^2 \cdot \mathbf{J}^2}{2 I(2I-1) J(2J-1)},$$

wobei g_J und g_I definiert sind durch

$$\vec{J} \cdot g_J = -\vec{\mu}_J; \quad \vec{I} \cdot g_I = -\vec{\mu}_I;$$

$\vec{\mu}_J$ und $\vec{\mu}_I$ sind die magnetischen Dipolmomente von Hülle und Kern in Einheiten von Bohrschen Magnetonen, A = magnetische Dipolwechselwirkungskonstante, B = elektrische Quadrupolwechselwirkungskonstante.

Bei Berechnung der Energieeigenwerte zu diesem Hamilton-Operator erhält man für den untersuchten $a^4F_{9/2}$ -Grundzustand des Co^{59} das in Abb. 1 gezeigte qualitative Aufspaltungsbild. Dieser Zustand spaltet insgesamt in $(2I+1)(2J+1) = 80$ Zeeman-Terme auf, von denen allerdings der Übersichtlichkeit halber die meisten in der Figur fortgelassen sind. Wenn man bedenkt, daß bei der verwendeten Ofentemperatur, wie oben erwähnt, die Übergänge zwischen diesen Zeeman-Termen nur 44% der Intensität aufweisen, so erhält man ein Maß für die Anforderungen an das Signal-Rausch-Verhältnis der Apparatur.

C. Übergänge

In der benutzten Atomstrahlresonanzapparatur waren die Inhomogenitäten der beiden Ablenkfelder parallel gerichtet, so daß nur Übergänge nachgewiesen werden konnten, die mit einer Änderung des Vorzeichens der magnetischen Quantenzahl m_J der Elektronenhülle verbunden waren. Beobachtet wurden nur Übergänge von $m_J = \pm 1/2 \rightarrow m_J = \mp 1/2$; sie sind in Abb. 1 eingezeichnet. Man kann zwei Sorten von Übergängen unterscheiden:

Tabelle 1
Beobachtete $\Delta F = \pm 1$ -Übergänge; sie unterliegen alle der apparativen Auswahlregel $m_J = \pm 1/2 \rightarrow m_J = \mp 1/2$.

$(F; m) \leftrightarrow (F; m)$	Δm	Anfangssteigung MHz/Gauß
$(3; 1) \leftrightarrow (4; 2)$	± 1	+ 1,08
$(3; 2) \leftrightarrow (4; 3)$	± 1	+ 0,79
$(3; 3) \leftrightarrow (4; 4)$	± 1	+ 0,51
$(3; 2) \leftrightarrow (4; 1)$	± 1	- 1,91
$(3; 3) \leftrightarrow (4; 2)$	± 1	- 2,19
$(4; 0) \leftrightarrow (5; 0)$	0	0,00
$(5; -1) \leftrightarrow (6; -1)$	0	0,08
$(6; -2) \leftrightarrow (7; -2)$	0	0,10
$(7; -3) \leftrightarrow (8; -3)$	0	0,10

1. $\Delta F = 0$ ($\Delta m = \pm 1$): die Frequenz dieser Übergänge geht mit verschwindendem Magnetfeld gegen 0; sie verläuft im „schwachen“ Magnetfeld linear mit dem Feld, im „mittleren“ Magnetfeld zeigt sich eine Abweichung von der Linearität, die bei genauer Vermessung von Frequenz und Magnetfeld eine Abschätzung der Hyperfeinstrukturaufspaltung gestattet¹⁰⁾ (vgl. Abschnitt: Messungen).

2. $\Delta F = \pm 1$ ($\Delta m = \pm 1; 0$): diese Übergänge geben nach Vermessung im „schwachen“ Magnetfeld und anschließender Extrapolation auf das Magnetfeld $H = 0$ die gesuchten Abstände der Hfs-Niveaus.

Die beobachteten $\Delta F = \pm 1$ -Übergänge sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

¹⁰⁾ W. A. Nierenberg, Ann. Rev. Nucl. Sci. 7 (1957).

D. Apparatur

Die für die Messungen benutzte Apparatur wurde im wesentlichen bereits früher beschrieben¹¹⁾. Es soll hier nur auf einige Änderungen und Besonderheiten eingegangen werden.

a) Ofen

Zur Erzeugung des Kobalt-Atomstrahls wurde ein Elektronenstoßofen¹²⁾ verwendet (vgl. Abb. 2). Da die Kobaltschmelze mit Kohle und schwer-schmelzbaren Metallen (z. B. Tantal und Molybdän), die für Tiegel in Frage kommen, reagiert, wurde ein mit Ausnahme eines eingesägten Schlitzes von etwa 0,2 mm Breite völlig geschlossener Tiegel aus stabilisiertem Zirkonoxyd (DEGUSSIT Zr 23) mit eingeschliffenem Deckel verwendet¹³⁾. Dieser Tiegel war mit einem 0,1 mm starken Molybdänblech umkleidet, auf das die Elektronen auftrafen. Im Gegensatz zu dem früher verwendeten Kohle-Kurzschlußofen¹⁴⁾ konnte also völlig auf Kohle verzichtet werden, die bei den benötigten Temperaturen von fast 2000 °C auch ohne unmittelbaren Kontakt mit dem in nicht unerheblichen Mengen verdampfenden Zirkonoxyd reagiert. Weitere Einzelheiten des Ofens sind aus Abb. 2 zu entnehmen: der auf positiver Hochspannung (Spitzen-spannung im Versuchssta-dium über 10 kV) liegende Tiegel in der Mitte steht auf einem Tablett, das von unten durch ein außen entlanggeführtes Gestänge getragen wird. Die Hochspannungs-Hochvakuum-durchführung erfolgt mit einem Teflonstopfen: zu ihrer Kühlung wird Preßluft

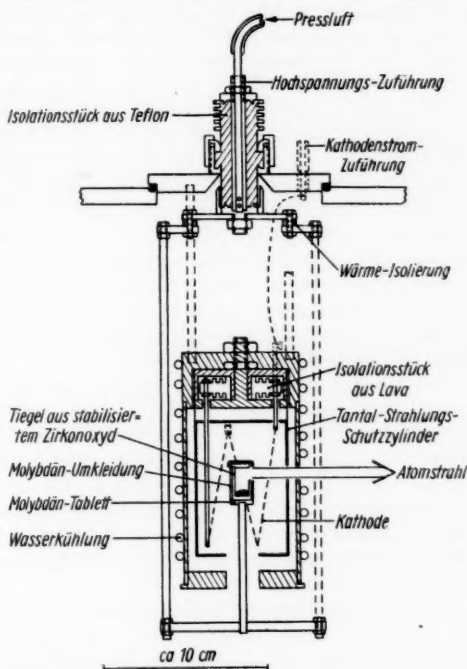


Abb. 2. Etwas vereinfachter Schnitt durch den verwendeten Elektronenstoßofen

¹¹⁾ D. v. Ehrenstein, G. Fricke u. P. Pietsch, Z. Physik **156**, 411 (1959).

¹²⁾ Ich danke Dr. K. F. Smith, Cambridge, für eine briefliche Beschreibung seines Elektronenstoßofens, der allerdings einige wesentliche Konstruktionsunterschiede zu dem hier beschriebenen Modell aufweist.

¹³⁾ Hersteller DEGUSSA, Abteilung Degussit, Frankfurt/Main.

¹⁴⁾ G. Fricke, H. Kopfermann u. S. Penselin, Z. Physik **154**, 218 (1959); G. Fricke, H. Kopfermann, S. Penselin u. K. Schlüpmann, Z. Physik **156**, 416 (1959).

durch zwei ineinandergesteckte Röhren hindurchgeblasen, die mit einem Plastikschauch herangeführt wird. Die Kathode ist zickzackförmig von Tantalstäben getragen, die in einem gegen Bedampfung gut abgeschirmten Isolationsstück aus Lava¹⁵⁾ festgeschraubt sind. Zum Laden wird nur der Tiegel mit Tablett und Halterungsstab nach unten herausgezogen; er läßt sich ohne Neujustierung wieder in die richtige Stellung bringen. Auswechseln der Kathode wird einfach durch Herausziehen des inneren Abschirmbleches und der Kathodenhalterung nach unten ausgeführt.

Durch das innere Abschirmblech konnten die Strahlungsverluste beträchtlich vermindert werden. So betrug die zur Erzeugung der schon erwähnten Temperatur von fast 2000 °C erforderliche Leistung etwa 800 Watt. Typische Daten für Elektronen-Beschleunigungsspannung und Emissionsstrom sind dabei etwa $U_{\text{eff}} = 1000 \text{ V}$ und $I_{\text{eff}} = 0,8 \text{ A}$ ¹⁶⁾.

U und I wurden so eingestellt, daß sich um die Kathode möglichst eine Raumladung ausbildete. So war die Ofentemperatur praktisch unabhängig von kleinen Schwankungen der Kathodentemperatur. Eine Stabilisierung des Kathoden-Heizstromes war nicht erforderlich. Bei sehr hoher Atomstrahlintensität¹⁷⁾ und zu starker Raumladung nahm der Emissionsstrom ohne Veränderung der zugeführten Spannungen zunächst langsam und dann mit zunehmender Geschwindigkeit zu (anscheinend durch Ionisation von Strahl-atomem, Zusammenbrechen der Raumladung und anschließendes Ionenbombardement der Kathode) und bewirkte schließlich einen Überschlag der Hochspannung, bisweilen verbunden mit einem Kurzschluß. Die Kathode (Wolframdraht 0,2 mm Ø) wurde mit etwa 4 A und 50 V Wechselstrom aus einem Schiebetransformator direkt geheizt. Die Elektronen-Beschleunigungsspannung wurde von einem Hochspannungstransformator mit anschließendem Gleichrichter (4 Hg-Dampfgleichrichter DCG 5000 in Graetz-Schaltung) erzeugt. Mit Hilfe eines vorgeschalteten Schiebetransformators konnte sie von 0 V an kontinuierlich geregelt werden. Die im Vergleich zu dem Heizstrom des in früheren Arbeiten¹⁴⁾ verwendeten Kohlekurzschlußofens (etwa 500 A Wechselstrom) sehr viel geringeren Ströme des Elektronenstoßofens bewirken eine erhebliche Verminderung der magnetischen Wechselfeld-Einstreuung ins homogene C-Feld.

Eine Ofenfüllung von 1 bis 2 g metallischem Kobalt reichte etwa 24 Stunden. Der Ofen wurde möglichst leer geschossen, da sonst der noch vorhandene Kobalt-Regulus beim Abkühlen meist den Zirkonoxydriegel zerbrach. Die Atomstrahlintensität ließ sich ohne weiteres noch um etwa einen Faktor 10 steigern, jedoch traten dann Intensitätsschwankungen des Atomstrahles auf. Mit ungebrauchten Zirkonoxydriegeln war die Strahlintensität bedeutend konstanter.

Der drehbare Deckel des Ofengehäuses trug in der üblichen Weise¹⁸⁾ ein zweites Exemplar der in Abb. 2 dargestellten Einheit, jedoch mit einem Kohleriegel zur Erzeugung eines Silberatomstrahles (vgl. Abschnitt: Messungen).

¹⁵⁾ Ausheizbare Keramik, zu beziehen von: Minnesota Mining and Manufacturing Company, New York.

¹⁶⁾ Mit einem Vorläufer des hier beschriebenen Ofens gelang es ohne Schwierigkeiten, einen Tantalriegel zu schmelzen (3000 °C).

¹⁷⁾ Einem Vielfachen der normalerweise verwendeten Intensität; die gewöhnlich verwendete Intensität entspricht einem Dampfdruck von der Größenordnung von 0,1 Torr im Zirkonoxydriegel.

¹⁸⁾ H. Lew, *Physic. Rev.* **91**, 619 (1953).

Zur Schonung der Kathode und zur Vermeidung von Überschlügen war das Vakuum auch beim Ausheizen des Ofens nie schlechter als einige 10^{-5} Torr; es wurde mit einer Leybold-500-Liter Quecksilberdiffusionspumpe und einer Edwards 5-Liter-Flüssig-Luft-Kühlfalle erzeugt (Betriebsdauer einer Kühlfallenfüllung 13–16 Stunden).

b) Magnetfelder

Da die beobachteten Übergänge $m_J = \pm 1/2 \rightarrow m_J = \mp 1/2$ einem relativ kleinen effektiven magnetischen Moment (im „starken“ Feld) von $\pm 0,67 \mu_{\text{Bohr}}$ entsprechen, wurde ein möglichst großer B-Feldspulenstrom als günstig herausgefunden und der A-Feldspulenstrom dazu passend gewählt (Resonanzhöhe des Flop-in-Signals als Maßstab). Es wurde oft ohne Schattendraht gearbeitet.

c) Hochfrequenz

Zur Einkopplung der Hochfrequenz ins homogene C-Feld wurden die bereits vorhandenen¹⁹⁾²⁰⁾ Hochfrequenzschleifen benutzt. Die Übergänge wurden bei den endgültigen Messungen mit folgenden Sendern erzeugt:

$\Delta F = 0$ -Übergänge: Siemens u. Halske Leistungsmeßsender 10 bis 400 MHz
 $\Delta F = 1$ -Übergänge:

$F = 3 \leftrightarrow F = 4$ und $F = 5 \leftrightarrow F = 6$: Rohde u. Schwarz UHF-Leistungsmeß-Sender 275 bis 2750 MHz

$F = 4 \leftrightarrow F = 5$: Carcinotron Co 210 } { der Firma TSF, Paris; Spannungsversorgung der Carcinotrons mit
 $F = 6 \leftrightarrow F = 7$: Carcinotron Co 210 } { Hilfe des Klystron-Netzgerätes Typ
 $F = 7 \leftrightarrow F = 8$: Carcinotron Co 119 } { NGC, Rohde u. Schwarz.

Die Frequenzmessung erfolgte wie bei früheren Messungen¹⁴⁾ mit dekadischen Frequenzmeßanlagen der Firmen Schomandl und Rohde u. Schwarz.

d) Detektor

Der Detektor ist ebenfalls bereits beschrieben²¹⁾. Zur Verminderung des von den Restgasionen der Masse 59 herrührenden Rauschens wurde das Vakuumgefäß des Massenspektrometers vor jeder Messung einige Stunden bei 100 °C bis 200 °C ausgeheizt. Das so erzielte optimale Signal-Rausch-Verhältnis ist aus Abb. 3 zu ersehen.

E. Messungen

Zunächst wurden bei kleinem Feld die fünf in Abb. 1 mit kleinen Pfeilen eingezeichneten $\Delta F = 0$ -Übergänge gefunden und durch Verfolgen zu höheren Magnetfeldern auf Grund der Magnetfeldabhängigkeit ihrer Frequenzen eindeutig zugeordnet. Von diesen wurde der Übergang im Term $F = 8$ ($m = -3 \leftrightarrow m = -4$) bei Magnetfeldern von etwa 100 Gauß und 200 Gauß genau vermessen. Bei diesen Messungen wurde das C-Feld in der üblichen Weise mit einem $\Delta F = 0$ -Übergang an einem Silberatomstrahl geeicht, der durch Drehung des Ofendeckels an die Stelle des Kobaltatomstrahles geschoben wurde. Aus den Abweichungen von der Linearität des Kobalt-Überganges wurde eine

¹⁹⁾ K. Schlüpmann, Diplomarbeit Heidelberg 1959 (unveröffentlicht).

²⁰⁾ E. Recknagel, Z. Physik **159**, 19 (1960).

²¹⁾ G. Fricke, Z. Physik **141**, 166 (1955).

Abschätzung der Hfs-Aufspaltung und zwar $A(a^4F_{9/2}) = (450 \pm 10) \text{ MHz}^{22)}$ gewonnen. Gleichzeitig ergab sich der g_J -Faktor des Kobaltgrundzustandes zu:

$$g_J(a^4F_{9/2}) = 1,3322(6)$$

Die dafür erforderliche Berechnung des Termverlaufes, der durch Gleichungen 5. (für $m = -4$) und 6. Grades (für $m = -3$) gegeben ist, erfolgte mit einer elektronischen Rechenmaschine²³⁾.

Mit der so gewonnenen Abschätzung der Hfs-Aufspaltung wurden die in Abb. 1 eingezeichneten $\Delta F = 1$ -Übergänge gefunden und bei verschiedenen Magnetfeldern zwischen 2 Gauß und 20 Gauß vermessen. Aus der Magnetfeld-

abhängigkeit der einzelnen Frequenzen ergab sich eine Kontrolle der Zuordnung der Frequenzen zu den Übergängen. Das Magnetfeld wurde zunächst mit einer Hallprobe bestimmt, bei den endgültigen Messungen jedoch in der eben

Tabelle 2
Die vermessenen $\Delta F = \pm 1$ -Übergänge im $a^4F_{9/2}$ -Zustand, auf das Feld $H = 0$ extrapoliert

$W(F=8) - W(F=7) = (3655,470 \pm 0,2) \text{ MHz}$
$W(F=7) - W(F=6) = (3169,440 \pm 0,05) \text{ MHz}$
$W(F=6) - W(F=5) = (2695,056 \pm 0,10) \text{ MHz}$
$W(F=5) - W(F=4) = (2230,638 \pm 0,05) \text{ MHz}$
$W(F=4) - W(F=3) = (1774,548 \pm 0,05) \text{ MHz}$

erwähnten Weise mit einem Silberübergang geeicht. Die Ergebnisse, rechnerisch auf das Feld $H = 0$ extrapoliert, zeigt Tab. 2. Die angegebenen Fehler sind, außer bei $W(F=8) - W(F=7)$ etwa die 3- bis 4fachen mittleren quadratischen Fehler; der Fehler von $W(F=8) - W(F=7)$ ist abgeschätzt, da der verwendete Sender etwa eine Bandbreite von 100 kHz besaß.

Ein Beispiel, wie die Resonanzen in einem günstigen Falle auf dem Schreiber erschienen, zeigt Abb. 3. Es handelt sich dort um die fünf $\Delta m = \pm 1$ Resonanzen, die zu dem Übergang $F = 3 \leftrightarrow F = 4$ gehören (vgl. Tabelle 1 und Abb. 1).

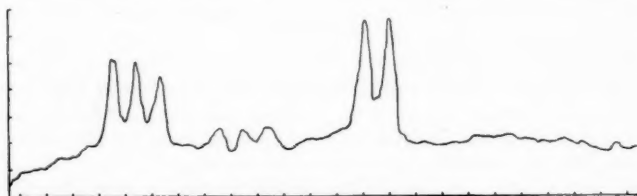


Abb. 3. Resonanzen, die zu dem Übergang $F = 3 \leftrightarrow F = 4$ gehören, bei schwachem Magnetfeld (vgl. Text); Ausschnitt aus dem Schreiberstreifen; die Abszisse entspricht der Frequenz, die Ordinate dem Ausschlag am Detektor

(Die kleinen Erhebungen in der Mitte zwischen den großen Resonanzen dürften zu $\Delta m = 0$ -Übergängen gehören, die infolge der vorhandenen parallelen Restkomponente der Hochfrequenzfeldstärke zur C-Feldrichtung noch erscheinen. Diese Übergänge sind in Tab. 1 und Abb. 1 nicht mit aufgeführt.)

²²⁾ Dieses Zwischenergebnis darf trotz seiner Übereinstimmung mit dem exakten Ergebnis nicht überschätzt werden, da bei der Abschätzung der Einfluß des Quadrupolmomentes völlig vernachlässigt wurde.

²³⁾ Ausgeführt an der IBM 650 des Instituts für praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt, Direktor Prof. Dr. A. Walther.

Aus den in Tab. 2 aufgeführten gemessenen Hfs-Abständen lassen sich A - und B -Faktor des $a^4F_{9/2}$ -Terms nach bekannten Formeln⁶⁾⁹⁾ bestimmen zu

$$A(a^4F_{9/2}) = (450,284 \pm 0,01) \text{ MHz}$$

$$B(a^4F_{9/2}) = (139,63 \pm 0,5) \text{ MHz},$$

dabei sind die angegebenen Fehler auf Grund der relativ großen Fehler der in Tab. 2 genannten Frequenzen abgeschätzt. Die Übereinstimmung der A - und B -Faktoren untereinander, die sich aus allen möglichen Kombinationen der in Tab. 2 angegebenen Hfs-Abstände errechnen lassen, ist etwa eine Größenordnung besser als der angegebene Fehler.

Die Linienbreite betrug bei den $\Delta m = \pm 1$ -Übergängen etwa 150 kHz, bei den $\Delta m = 0$ -Übergängen etwa 400 bis 600 kHz.

F. Berechnung des Kernquadrupolmomentes

a) Bestimmung des Feinstruktur-Aufspaltungsparameters und Ermittlung der Eigenfunktion des $a^4F_{9/2}$ -Grundzustandes

Der vermessene Grundzustand $a^4F_{9/2}$ wird überwiegend von der $3d^7 4s^2$ -Elektronenkonfiguration gebildet. Die Abweichung von der Landéschen Intervallregel im a^4F -Multiplett deutet wahrscheinlich auf eine Abweichung von der LS-Kopplung hin. Bevor man also aus dem gemessenen $B(a^4F_{9/2})$ das Quadrupolmoment ausrechnen kann, muß man die Eigenfunktion des $a^4F_{9/2}$ ermitteln. Das kann man mit Hilfe der Matrix für die Spin-Bahn-Wechselwirkung und den elektrostatischen Multiplettabständen (Slater-Integrale) erreichen, die für das Co-I-Spektrum bereits²⁴⁾²⁵⁾ angegeben sind, und aus der man unter Hinzuziehung der bekannten Feinstrukturtermlagen²⁶⁾ den Spin-Bahn-Wechselwirkungsparameter a ermitteln kann. Vernachlässigt man zunächst alle

außerdiagonalen Glieder in dieser Matrix, so erhält man aus der Differenzbildung der angegebenen Feinstrukturterme die in Tab. 3 in der linken Spalte aufgeführten Werte für a . Wenn man die außerdiagonalen Glieder der $3d^7 4s^2$ -Konfiguration in einer Störungsrechnung erster Nä-

herung mitberücksichtigt, in die die aus der linken Spalte in Tab. 3 gewonnene Annahme $a = -520 \text{ cm}^{-1}$ eingeht, so erhält man die in der rechten Spalte genannten Werte. Der Wert, der aus der Termlage des $3d^7 4s^2 {}^2H_{11/2}$ gewonnen wird, sollte mit einem größeren Gewicht versehen werden, weil dieser Term keinen Störpartner besitzt; ebenso sollte im vorliegenden Falle der Wert, in

Tabelle 3
Ermittlung des Fs-Aufspaltungsparameters a in der $3d^7 4s^2$ -Elektronenkonfiguration

Termdifferenz	Bei Vernachlässigung der außerdiagonalen Glieder der Spin-Bahn-Wechselwirkung	Bei Berücksichtigung der außerdiagonalen Glieder der Spin-Bahn-Wechselwirkung in einer Störungsrechnung erster Näherung (Annahme $a = -520 \text{ cm}^{-1}$)
${}^2H_{11/2} - {}^2H_{9/2}$	$a = -632 \text{ cm}^{-1}$	$a = -523,7 \text{ cm}^{-1}$
${}^2G_{9/2} - {}^2G_{7/2}$	$a = -567 \text{ cm}^{-1}$	$a = -512,3 \text{ cm}^{-1}$
${}^4F_{9/2} - {}^4F_{7/2}$	$a = -544 \text{ cm}^{-1}$	$a = -525,4 \text{ cm}^{-1}$
${}^4F_{7/2} - {}^4F_{5/2}$	$a = -506 \text{ cm}^{-1}$	$a = (-512,7) \text{ cm}^{-1}$
${}^4F_{5/2} - {}^4F_{3/2}$	$a = -483 \text{ cm}^{-1}$	$a = (-507,2) \text{ cm}^{-1}$

²⁴⁾ H. H. Marvin, Physic. Rev. **47**, 521 (1935).

²⁵⁾ G. Racah, Physic. Rev. **61**, 537 (1942).

²⁶⁾ Ch. E. Moore, Atomic Energy Levels II, Washington 1952.

den der ${}^4F_{9/2}$ -Term eingeht, stärkere Berücksichtigung finden, weil dies der untersuchte Zustand ist; die Werte jedoch an denen ein ${}^4F_{5/2}$ und ${}^4F_{3/2}$ beteiligt sind, besitzen eine größere Unsicherheit, weil nicht alle in der zugehörigen Matrix vorkommenden Terme beobachtet sind, und ihre Abschätzung zum Teil auch Schwierigkeiten bereitet. (Diese Gewichtsverteilungen sind in Tabelle 3 durch ! und () angedeutet.) Nach Berücksichtigung dieser Gewichte wird (vgl. ²⁴))

$$a = (-520 \pm 10) \text{ cm}^{-1}$$

angenommen.

Mit Hilfe des üblichen quantenmechanischen Verfahrens kann aus der nun bekannten Feinstrukturmatrix (für $J = 9/2$) die anteilmäßige Zusammensetzung der Eigenfunktion des $a {}^4F_{9/2}$ aus den Eigenfunktionen der Terme der $3d^7 4s^2$ -Elektronenkonfiguration berechnet werden:

$$\begin{aligned} \psi(a {}^4F_{9/2}) &= \alpha \psi(3d^7 4s^2 {}^4F_{9/2}) + \beta \psi(3d^7 4s^2 {}^2G_{9/2}) \\ &+ \gamma \psi(3d^7 4s^2 {}^2H_{9/2}) = 0,999 \psi(3d^7 4s^2 {}^4F_{9/2}) \\ &+ 0,05 \psi(3d^7 4s^2 {}^2G_{9/2}) + 0,002 \psi(3d^7 4s^2 {}^2H_{9/2}). \end{aligned} \quad (2)$$

Dabei sind alle Interkonfigurationsstörungen der $3d^8 4s$ -Elektronenkonfiguration vernachlässigt, die allerdings auch nicht unmittelbar auf den $3d^7 4s^2 {}^4F_{9/2}$ -Zustand einwirken. Ein Vergleich mit dem kürzlich gerechneten Iridium-Spektrum²⁷), das außerhalb des Rumpfes genau die gleichen Elektronenkonfigurationen aufweist, läßt die Vernachlässigung gerechtfertigt erscheinen. Im folgenden sei auch der $3d^7 4s^2 {}^2H_{9/2}$ -Zustand wegen seines geringen Anteils vernachlässigt.

Die Eigenfunktionen der interessierenden $3d^7 4s^2 {}^4F_{9/2}$, $3d^7 4s^2 {}^2G_{9/2}$ -Terme lassen sich für drei äquivalente d -Elektronen (im vorliegenden Fall d -Löcher; die $4s^2$ -Schale ist abgeschlossen und braucht ebenso wie der übrige Elektronenrumpf nicht berücksichtigt zu werden) mit Hilfe der Arbeiten von Racah²⁸) in folgender Form schreiben (Abkopplung eines d -Elektrons, um die Methode von Schwartz³⁰) anzuwenden)

$$\begin{aligned} \psi(3d^3 4s^2 {}^4F_{9/2}) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \psi\left({}^3P_2 \frac{5}{2} \frac{9}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}} \sum_{j_1=j_2=3/2, 5/2}^{j_1=j_2=3/2, 5/2} c' \psi\left({}^3F_{j'} j_3 \frac{9}{2}\right) \\ \psi(3d^3 4s^2 {}^2G_{9/2}) &= \left(-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{42}}\right) \psi\left({}^1D_2 \frac{5}{2} \frac{9}{2}\right) \\ &+ \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{42}} \sum_{j_1=j_2=3/2, 5/2}^{j_1=j_2=3/2, 5/2} c'_2 \psi\left({}^3F_{j'} j_3 \frac{9}{2}\right) + \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{42}} \sum_{j_3=3/2, 5/2} c'_3 \psi\left({}^1G_4 j_3 \frac{9}{2}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Die Brüche vor den Summenzeichen bzw. vor ψ auf den rechten Seiten dieser Gleichungen sind die „gebrochenen Elternschaftskoeffizienten“, die man bei Racah III tabelliert findet. Die Koeffizienten c' hinter den Summenzeichen sind die LS - jj -Kopplungskoeffizienten, die man mit Hilfe von $9-j$ -Symbolen³¹) ausrechnen kann.

²⁷) Th. A. M. van Kleef, Het Spectrum van Iridium, Dissertation, Amsterdam 1967.

²⁸) G. Racah, Physic. Rev. **62**, 438 (1942) (im folgenden Racah II).

²⁹) G. Racah, Physic. Rev. **63**, 367 (1943) (im folgenden Racah III).

³⁰) Ch. Schwartz, Physic. Rev. **97**, 380 (1955).

³¹) E. P. Wigner, 1951, unveröffentlicht, vgl. A. R. Edmonds, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton, New Jersey, 1957.

b) Ermittlung des magnetischen Dipolwechselwirkungsfaktors A ($a^4 F_{9/2}$) und Bestimmung von Z_i

Mit Hilfe von Schwartz³⁰⁾ gibt Nöldeke³²⁾ an

$$A(\gamma J) = g_I \frac{\langle \gamma J \| T^{(1)} \| \gamma J \rangle}{[J(J+1)(2J+1)]^{1/2}} \quad (4)$$

dabei ist im vorliegenden Falle³³⁾

$$\begin{aligned} \langle \gamma J \| T^{(1)} \| \gamma J \rangle &= \langle \gamma J \| \sum T_{3d}^{(1)} \| \gamma J \rangle \\ &= 3 \langle \psi(a^4 F_{9/2}) \| T_{3d}^{(1)} \| \psi(a^4 F_{9/2}) \rangle \end{aligned} \quad (5)$$

in die man die nach (3) berechneten Eigenfunktionen einsetzt. Zum Ausmultiplizieren dient Formel (44b) aus Racah II, die auf reduzierte Matrixelemente $\langle j \| T^{(1)} \| j' \rangle$ führt. Es gilt

$$\langle j \| T^{(1)} \| j \rangle = \frac{a_j}{g_I} [j(j+1)(2j+1)]^{1/2}$$

$$\langle j \| T^{(1)} \| (j-1) \rangle = - \langle (j-1) \| T^{(1)} \| j \rangle = \frac{a'''}{g_I} [2l(l+1)(2l+1)]^{1/2} \quad (2)$$

Ausmultiplizieren und Einsetzen in (5) liefert

$$\begin{aligned} A(a^4 F_{9/2}) &= \alpha^2 \frac{1}{9} (a_{d_{3/2}} + 8 a_{d_{5/2}} + 8 a''') + \beta^2 \frac{1}{225} (46 a_{d_{3/2}} + 179 a_{d_{5/2}} - 8 a''') \\ &\quad + 2 \alpha \beta \frac{\sqrt{2}}{5 \sqrt{5}} (-a_{d_{3/2}} + a_{d_{5/2}} - 2 a''') \end{aligned} \quad (6)$$

wobei die a_j und a''' z. B. bei Kopfermann⁹⁾ angegeben werden. Das dort benötigte $(1/r^3)$ gewinnt man mit Hilfe von Trees³⁴⁾ aus dem Feinstruktur-Aufspaltungsparameter a als Funktion von $Z_i \cdot H_r$ = innere Kernladungszahl mal Relativitätskorrektur⁹⁾. Damit erhält man mit³⁴⁾ $-a = \zeta_{3d} = 520 \text{ cm}^{-1}$ (Vorzeichenumkehr da d^7 eine Loch-Konfiguration, vgl. Racah II) aus dem gemessenen $A(a^4 F_{9/2}) = 450,284 \text{ MHz}$ die innere Kernladungszahl für ein d -Elektron beim Kobalt ($Z = 27$)

$$Z_i = 17,3 = Z - 9,7.$$

c) Ermittlung des elektrischen Quadrupolwechselwirkungsfaktors B ($a^4 F_{9/2}$) und Bestimmung des Kernquadrupolmomentes Q

Mit Hilfe von Schwartz³⁰⁾ gibt Nöldeke³²⁾ an,

$$B(\gamma J) = Q \frac{2(2J!)}{[(2J-2)!(2J+3)!]^{1/2}} \langle \gamma J \| T^{(2)} \| \gamma J \rangle \quad (7)$$

wobei $\langle \gamma J \| T^{(2)} \| \gamma J \rangle$ aus (5) gewonnen wird, indem man $T^{(1)}$ durch $T^{(2)}$ ersetzt. Das Ausmultiplizieren erfolgt wieder mit Hilfe von Racah II, Gleichung (44b). Für die reduzierten Matrixelemente gilt jetzt

$$\begin{aligned} \langle j \| T^{(2)} \| j \rangle &= \frac{e^2}{\kappa_e r^3} R_r \left[\frac{(2j-1)(2j+1)(2j+3)}{j(j+1)} \right]^{1/2} \cdot \frac{1}{4} \\ \langle (j-1) \| T^{(2)} \| j \rangle &= - \langle j \| T^{(2)} \| (j-1) \rangle = \\ &= - \frac{e^2}{\kappa_e r^3} S_r \left[\frac{3(2j-1)(2j+1)}{j(j+1)(j-1)} \right]^{1/2} \cdot \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

³²⁾ G. Nöldeke, Z. Physik **153**, 164 (1958).

³³⁾ Der Faktor 3 erscheint auf der rechten Seite, weil über die drei äquivalenten d -Elektronen-Löcher summiert wird.

³⁴⁾ F. E. Trees, Physic. Rev. **92**, 308 (1953).

Damit erhält man den B -Faktor des betrachteten $a^4F_{9/2}$ -Grundsatzes zu

$$B(a^4F_{9/2}) = \frac{e^2}{\kappa_e} \frac{1}{r^3} Q \frac{18}{25} \left\{ \alpha^2 \left[\frac{1}{9} R''_r(Z_i) - \frac{2}{7} R'_r(Z_i) + \frac{4}{7} S_r(Z_i) \right] \right. \\ \left. + \beta^2 \frac{2}{5} \left[\frac{1}{9} R''_r(Z_i) - R'_r(Z_i) + \frac{2}{21} S_r(Z_i) \right] \right. \\ \left. + 2 \alpha \beta \frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{5}} \left[-R''_r(Z_i) + 4 R'_r(Z_i) - 3 S_r(Z_i) \right] \right\}. \quad (8)$$

Dabei sind die R''_r , R'_r und S_r Relativitätskorrekturen, die als Funktionen von Z_i anzusehen sind. Man findet sie wieder bei Kopfermann⁹⁾ tabelliert. In unserem Falle sind diese Relativitätskorrekturen natürlich für ein d -Elektron zu nehmen. In Formel (8) wurde außerdem wegen der vorliegenden Lochkonfiguration ein Vorzeichenwechsel vorgenommen (vgl. Racah II). Das in (8) auftretende $1/r^3$ läßt sich nach Bestimmung von Z_i im letzten Abschnitt aus dem Feinstruktur-Aufspaltungsparameter $a = -\zeta_{3d}$ angeben³⁴⁾.

Setzt man in (8) den gemessenen Wert $B(a^4F_{9/2}) = 139,63$ MHz ein, so erhält man das Kernquadrupolmoment des Co^{59} . Kernes zu³⁵⁾

$$Q = (0,404 \pm 0,04) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Der Fehler ergibt sich im wesentlichen nur aus einer vorsichtigen Berücksichtigung der Vernachlässigungen. Dazu ist folgendes zu sagen. Die störenden Terme $3d^7 4s^2 {}^2H_{9/2}$, $3d^7 4s^2 {}^2G_{9/2}$ und $3d^8 4s {}^2G_{9/2}$ liefern alle in 1. Näherung keinen Beitrag zum B -Faktor (ohne Relativitätskorrekturen). In zweiter Näherung wurde ausschließlich der am stärksten beigemischte $3d^7 4s^2 {}^2G_{9/2}$ -Term berücksichtigt, der bereits nur einen Beitrag von etwa 0,2% zum B -Faktor liefert (mit Relativitätskorrekturen, vgl. Formel (8)). Beim A -Faktor wurde ebenfalls lediglich die Störung durch den $3d^7 4s^2 {}^2G_{9/2}$ -Term berücksichtigt, der eine Änderung des A -Faktors von etwa 1% ausmacht. Außer durch Zumischung der anderen eben erwähnten Störterme wird der A -Faktor aber auch noch durch Zumischung von Termen mit aufgebrochener $4s^2$ -Schale insbesondere durch den $3d^7 4s {}^5s {}^4F_{9/2}$ -Term beeinflusst³⁷⁾. Diese Störung würde eine Verkleinerung des Z_i und damit des oben angegebenen Quadrupolmomentes bewirken.

Herrn Professor Dr. H. Kopfermann danke ich für seine einführende Förderung und für sein Interesse an dieser Untersuchung, Herrn Dr. G. Fricke für seine Unterstützung im Anfangsstadium dieser Arbeit, Herrn Dr. G. Nöldeke für seine entscheidende Hilfe bei den Rechnungen, Herrn Dr. S. Penselin für Ratschläge und Hilfe, Herrn Dipl.-Phys. K. Schlüpmann und Herrn cand. phys. I. Bender für Mithilfe bei den Messungen.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft, dem Bundesministerium für Atomkernenergie und Wasserwirtschaft und der Heidelberger Akademie der Wissenschaften danke ich für die großzügige Unterstützung.

³⁵⁾ Ohne Sternheimer-Korrekturen³⁶⁾.

³⁶⁾ R. Sternheimer, Physic. Rev. **80**, 102 (1950); **84**, 244 (1951); **86**, 316 (1952).

³⁷⁾ G. G. Koster, Physic. Rev. **86**, 148 (1952).

Heidelberg, I. Physikalisches Institut der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 2. September 1960.

Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6; für den Anzeigenteil: DEWAG-Werbung Leipzig, Leipzig C 1, Friedrich-Ebert-Str. 110, Ruf 7851. Z. Z. gilt Anzeigenpreislite 4. Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstr. 18 B, Fernruf: 27 681, 27 682. ZLN 5066

Printed in Germany

Druck: Paul Dünhaupt, Köthen (IV/5/1) L 56/61

Bruno H. Bürgel zum Gedenken

Herausgegeben im Auftrag des Bruno-H.-Bürgel-Arbeitskreises im Deutschen Kulturbund, Kreis Potsdam, von L. Wörner, P. Nell †, J. Deutsch und W. Tripmacker.
3. Auflage. 88 Seiten mit einem Bildnis, 8 Tafeln und 2 Textzeichnungen. 1961
Kl. 8°. Leinen DM 3,60

Nachrichten der Olbers-Gesellschaft: Mit der Schrift ist dem deutschen Schriftsteller, der sich in allen Schichten des Volkes die Herzen in gleicher Weise erobert hat, ein Denkmal gesetzt. Das Buch enthält eine Mahnung und Forderung zu Bürgels Büchern zu greifen und somit sein Vermächtnis zu erfüllen, sich Anregungen und Gedanken für ein naturwissenschaftliches Weltbild zu holen.

Dr. Erwin Mücke

JOHANN AMBROSIOUS BARTH
VERLAG/LEIPZIG

Kalorimeter

nach Berthelot-Mahler-Köcker für die Heizwertbestimmung fester und flüssiger Brennstoffe.



Ölprüfgeräte

Viskosimeter, Flammpunktprüfer.

Laborgeräte

Destillationsapparate, Apparate zur Bestimmung des Erweichungs- bzw. Erstarrungspunktes, Wasser- und Sandbäder.

Fraktionssammler

VEB (K) Apparatebau
Potsdam-Babelsberg
Gartenstr. 2/10



PRESSLER PHOTOZELLEN

DGL-PRESSLER LEIPZIG

Festkörperphysik II

Arbeitstagung vom 8. bis 11. April 1954 in Dresden

Redaktion Dr. K. W. Böer, Berlin

219 Seiten mit 205 Abbildungen im Text. 1955. Gr. 4°. DM 21,—

Bergakademie: Über den fachlichen Rahmen der einzelnen Beiträge hinaus verdient der Band besondere Beachtung, da er auch dem der Materie fernstehenden Leser gute Einblicke in ein Spezialgebiet der Physik gewährt, das heute sowohl den reinen Wissenschaftler als auch den Techniker interessiert.

Günther

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Quantentheorie des Atoms

Von Prof. Dr. A. RUBINOWICZ, Warschau

Übersetzung nach der 2. polnischen Auflage des Werkes „Kwantowa Teoria Atomu“. VII, 486 Seiten mit 38 Figuren im Text. 1959. gr. 8°.

DM 29,80, Leinen DM 31,80

Dieses Lehrbuch ist aus den langjährigen Vorlesungen des Verfassers hervorgegangen. Im ersten Teil des Buches wird die Entwicklung der älteren Quantentheorie dargestellt. Es soll damit dem Leser vor Augen geführt werden, wie zwangsläufig und wie reich an Momenten voll dramatischer Spannung die Entwicklungsgeschichte der Quantentheorie gewesen ist.

Kristallchemie und Kristallphysik metallischer Werkstoffe

Von Dr. FRANZ HALLA, Brüssel

Em. Prof. an der Technischen Hochschule Wien

Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Association pour les Études Texturales, Brüssel

3., völlig umgearbeitete Auflage

XVI, 737 Seiten mit 365 Abbildungen im Text und auf einer Tafel. 1957. gr. 8°.

DM 50,—, Leinen DM 52,—

Angewandte Chemie: „Das Buch von Halla, das in erster Auflage 1939 erschien, ist nunmehr stark verändert und erweitert neu herausgekommen. Man könnte das Werk auch als Lehrbuch der Metallkunde unter besonderer Berücksichtigung der Strukturlehre bezeichnen. Das Werk stellt eine bewundernswerte Leistung des Verfassers dar, der aus zahlreichen Einzelveröffentlichungen ein außerordentlich großes Tatsachenmaterial zusammengetragen hat. Das Buch bildet ein wertvolles Bindeglied zwischen voneinander weit entfernten Arbeitsgebieten der Physik, Chemie, Metallkunde und der Technik. Es kommt daher für einen großen Interessentenkreis in Frage und wird als Lehr- und Nachschlagewerk mit Nutzen verwendet werden.“

G. Wassermann

Größengleichungen, Einheiten und Dimensionen

Von Prof. Dr. phil., Dr.-Ing. e. h. JULIUS WALLOT

Karlsruhe, Technische Hochschule

2., verbesserte Auflage

XII, 220 Seiten. 1957. gr. 8°. DM 14,70, Leinen DM 16,35

„Zeitschrift für Naturforschung“: „Das Buch ist nicht nur ein sicherer, sondern auch ein angenehmer Wegweiser durch das behandelte, oft als trocken verschränkte Gebiet, denn es ist überaus anregend und ohne Aufwand an mathematischen Methoden geschrieben. Es beendet zudem in überzeugender Weise den Meinungsstreit über so viele Fragen, daß es aller Wahrscheinlichkeit nach auf lange Zeit hinaus das grundlegende Werk auf seinem Gebiet sein wird.“

Johannes Fischer (Karlsruhe)

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG